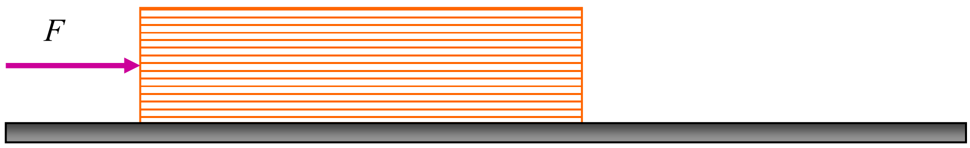
Dodatak: Naprezanja, Mohrove kružnice.

D.1 Ravnoteža. Unutarnje sile. Posmična i normalna naprezanja.

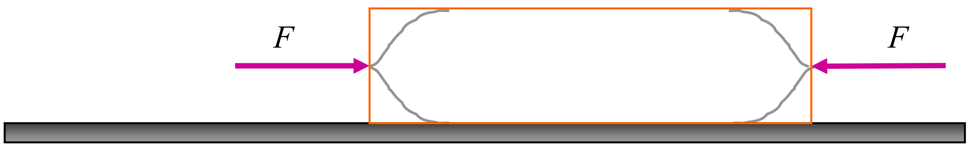
Mehanika, tehnička mehanika, otpornost materijala… discipline su čije razumijevanje prethodi mehanici tla. Ovdje se prikazuje niz primjera sa namjerom da se prizove intuitivno poimanje mirovanja i ravnoteže, te na ilustrativni način ponovi niz pojmova: naprezanj, Mohrova kružnica… posve neophodnih za bilo kakovo bavljenje mehanikom tla. Studentu se preporuča da – ako je potrebno – konzultira bilješke sa predavanja ili potrebnu literaturu.

Promatrajmo drveno tijelo oblika kvadra na glatkoj podlozi. Djelujmo silom na to tijelo.



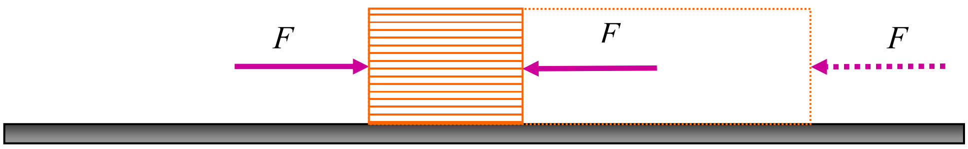
Tijelo se giba. Da bismo ga umirili, treba uravnotežiti silu.

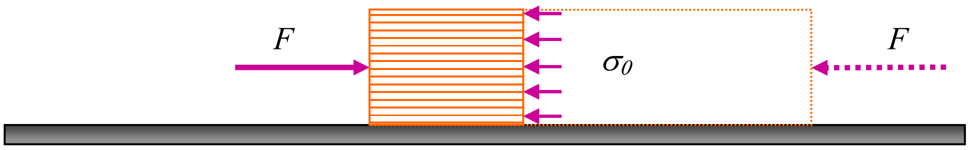
Na mjestu djelovanja sile, vlakanca su opterećena više nego susjedna, ali, zbog trenja među vlakancima, ako je tijelo dovoljno dugo, u središnjem su dijelu sva vlakanca jednako opterećena.



Sila se prenosi kroz tijelo, kroz vlakanca. Promatrajmo unutrašnjost tijela, napregnutost vlakanaca.

Kao što mirovanje tijela znači ravnotežu sila koje djeluju na njega, tako i mirovanje pojedinih dijelova tijela znači ravnotežu sila koje djeluju na promatrani dio tijela.
Promatrajmo jedan zamišljeni presjek i dio tijela koji je njime određen.



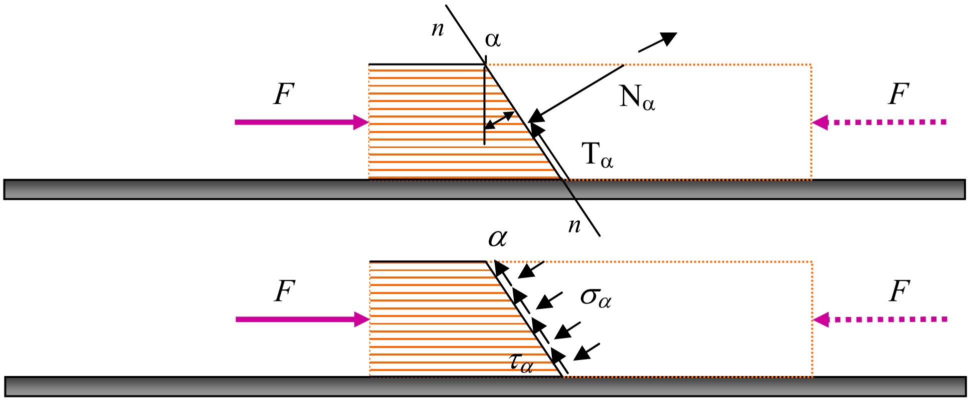


Tu djeluje ista sila, F, ali raspoređena po svim vlakancima.
Srednju veličina sile koja djeluje na jedinici površine promatrane plohe zovemo ***naprezanje*:**

$$\sigma_0 = \frac{F}{A}$$

U ovom presjeku, rezultantna sila okomita je (normalna) na presjek (i tlačna), pa su naprezanja normalna (i to tlačna). Rezultantna sila djeluje centrično, pa su, dovoljno daleko od ruba tijela na kome djeluje sila, naprezanja jednoliko raspodijeljena. Kako tlo gotovo da ne prima vlačna naprezanja, u mehanici tla tlačni se naprezanja smatraju pozitivnim.

Promotrimo neki drugi presjek, *n-n*, pod nagibom α. Rezultantnu silu, ovdje također veličine F, običavamo rastaviti na dvije komponente: jednu okomitu (normalnu), N_α, i jednu paralelnu sa presjekom (posmičnu), T_α. Presjek *n-n* definiran je kutom α što ga normala zatvara sa osi x.



U tom presjeku razlikujemo
okomito ili ***normalno naprezanje***, omjer normalne komponente sile na presjek i površine presjeka,

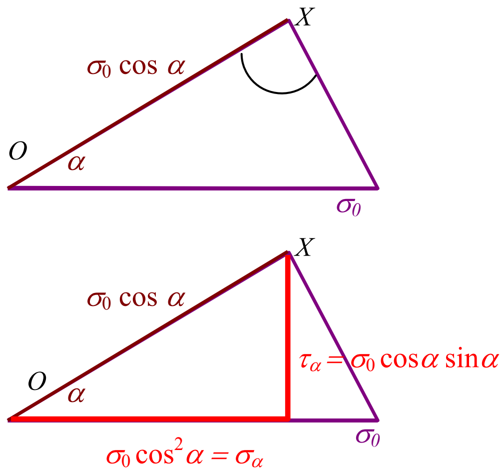
$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F\cos\alpha}{A/\cos\alpha} = \frac{F}{A}\cos^2\alpha = \sigma_0\cos^2\alpha$$

posmično ili ***tangencijalno naprezanje***, omjer tangencijalne (posmične) komponente sile na presjek i površine presjeka,

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F\sin\alpha}{A/\cos\alpha} = \frac{F}{A}\sin\alpha\cos\alpha = \sigma_0\sin\alpha\cos\alpha$$

Mijenjamo li nagib promatranog zamišljenog presjeka, kut α, mijenjaju se i vrijednosti normalnog i posmičnog naprezanja u presjeku prema izvedenim izrazima.

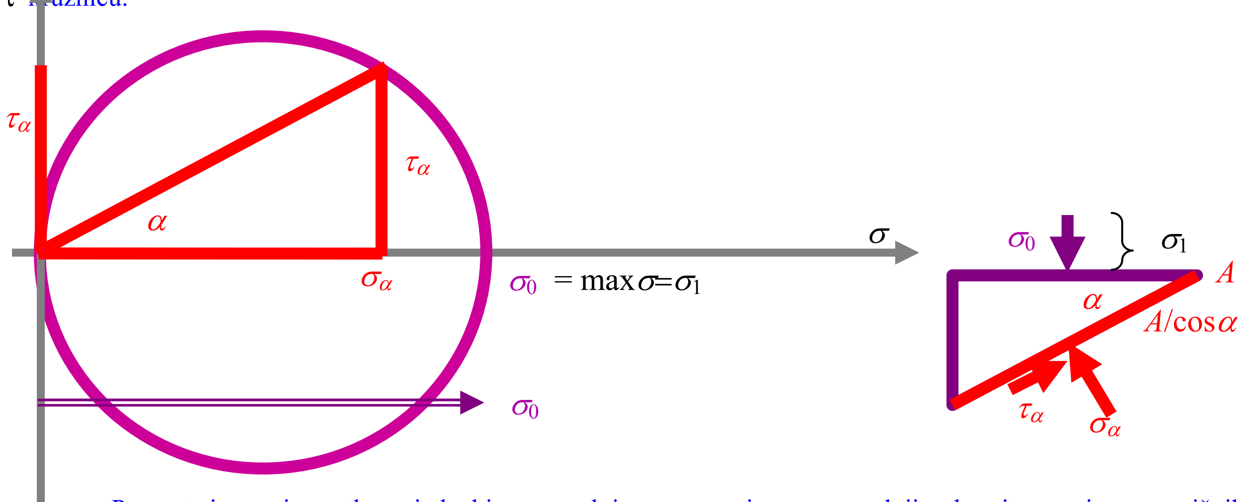
D.2 Jednoosno stanje, izotropno stanje, dvoosno stanje naprezanja.



Vrlo zanimljiv je, pokazuje se, grafički prikaz naprezanja u koordinatnom sustavu σ,τ. Uobičajeno je okomita ili normalna naprezanja nanijeti na horizontalnu os, posmične ili tangencijalne na vertikalnu.

Ako je $\sigma_0 = F/A$ nanesen na horizontalnu os, hipotenuza trokuta kojemu je kut – uz ishodište – α, $\sigma_0\cos\alpha$ je duljina susjedne stranice. Projiciramo li tu stranicu, dužinu $0X$, na os σ, dobivamo $\sigma_0\cos\alpha\cos\alpha$, što je vrijednost σ_α. Projiciramo li tu stranicu, dužinu $0X$, na os τ, dobivamo $\sigma_0\cos\alpha\sin\alpha$, što je vrijednost τ_α. Dakle, točka X predstavlja par σ_α, τ_α, par normalnog i posmičnog naprezanja u ravnini α.. Mijenjamo li kut α, točka X, kao vrh nasuprot hipotenuze, opisuje kružnicu. Tu kružnicu, kojoj svaka točka odgovara jednoj ravnini – a obuhvaćene su ravnine svih nagiba – zovemo *Mohrova kružnica*.

Prikazani primjer predstavlja jednoosno stanje naprezanja. Skica pokazuje prizmu tla sa zadanim F/A u npr. horizontalnoj ravnini, i traženim naprezanjima u ravnini nagnutoj pod α:: σ_α i τ_α, te odgovarajuću Mohrovu kružnicu.



Promatrajmo prizmu tla sa jednakim normalnim naprezanjem, σ_3, na dvije okomite ravnine, posmičnih naprezanja neka nema. Tražimo naprezanja u ravnini pod kutem α: σ_α i τ_α. Ravnoteža u horizontalnom i vertikalnom smjeru implicira

$$\sigma_3 A \sin\alpha/\cos\alpha + \tau_\alpha \cos\alpha A/\cos\alpha - \sigma_\alpha \sin\alpha A/\cos\alpha = 0$$

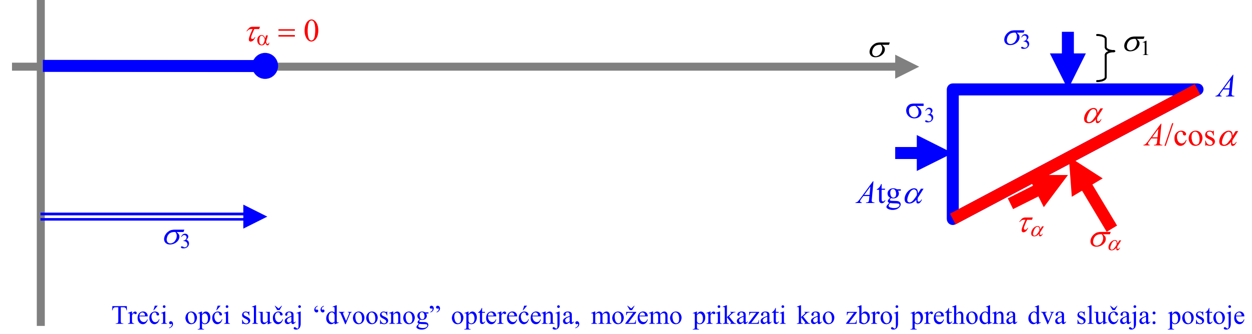
$$\sigma_3 A - \tau_\alpha \sin\alpha A/\cos\alpha - \sigma_\alpha \cos\alpha A/\cos\alpha = 0$$

iz čega slijedi $(\sigma_3 - \sigma_\alpha)\sin\alpha + \tau_\alpha \cos\alpha = 0;\ (\sigma_3 - \sigma_\alpha)\cos\alpha - \tau_\alpha \sin\alpha = 0$

iz čega slijedi $(\sigma_3 - \sigma_\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0;\ \tau_\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$

iz čega slijedi $\sigma_\alpha = \sigma_3$ i $\tau_\alpha = 0$

Drugim riječima, u svakoj su ravnini normalna naprezanja jednaki σ_3, a posmični jednaki nuli. Odgovarajuća Mohrova kružnica je točka na mjestu $(\sigma_3, 0)$.

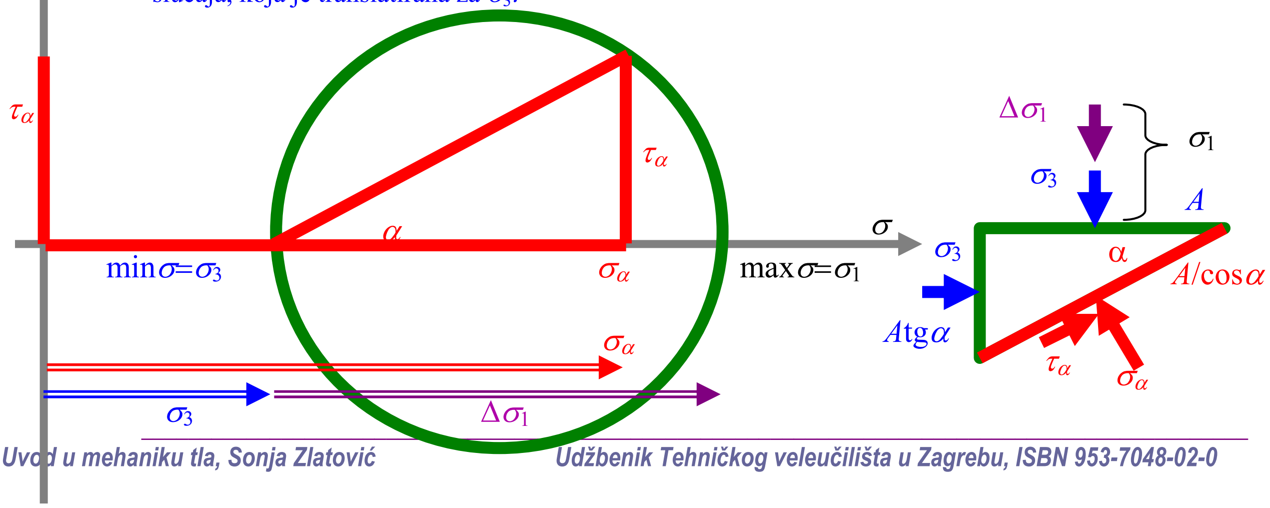


Treći, opći slučaj "dvoosnog" opterećenja, možemo prikazati kao zbroj prethodna dva slučaja: postoje dvije okomite ravnine u kojima nema posmičnih naprezanja, okomita naprezanja u njima mogu se prikazati kao σ_2 u jednoj i $\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_2$ u drugoj. Pretpostavljajući linearnost, dobivamo vrijednosti naprezanja na ravnini nagiba α:

$\sigma_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos^2\alpha + \sigma_2 = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$

$\tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos\alpha \sin\alpha$

Odgovarajuća Mohrova kružnica, prikazujući zbroj stanja naprezanja, predstavlja kružnicu iz prvog slučaja, koja je translatirana za σ_3.

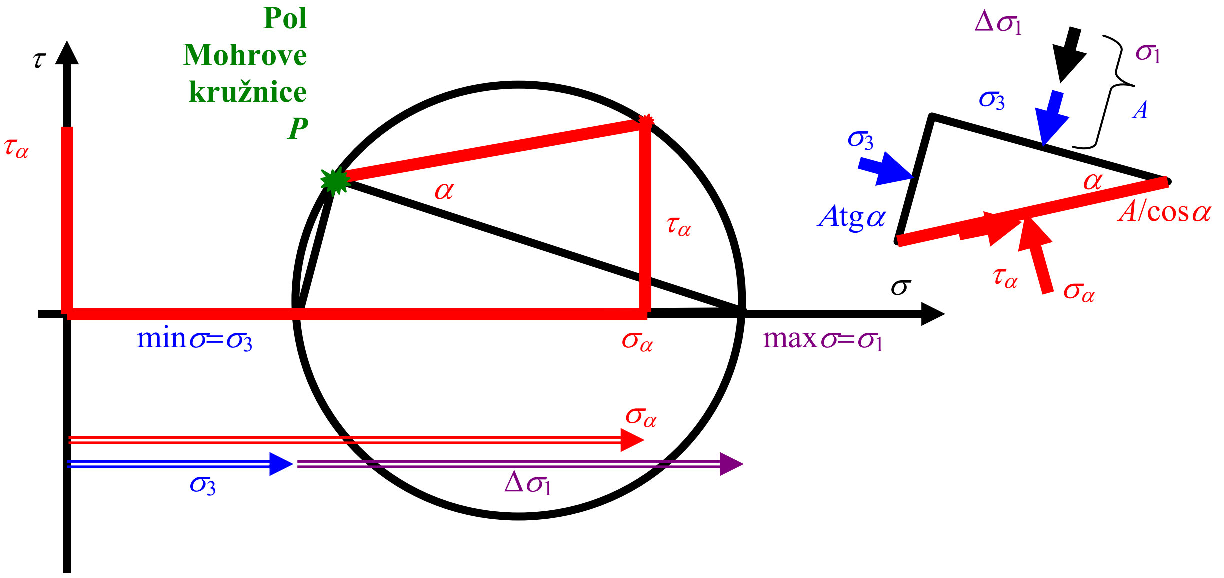


D.3 Mohrova kružnica. Pol Mohrove kružnice.

Jedna Mohrova kružnica, dakle, grafički prikazuje naprezanja u jednoj točki prostora i vremena. Svaka točka Mohrove kružnice odgovara jednom smjeru tj. jednoj ravnini u toj promatranoj točki prostora. Obratno, svakoj ravnini promatrane točke odgovara jedna točka Mohrove kružnice, tj. jedan par naprezanja σ, τ.

Korisno je uočiti postojanje ***pola Mohrove kružnice***: paralela promatranoj ravnini u prostoru, povučena kroz pol Mohrove kružnice, siječe Mohrovu kružnicu u točki σ, τ koja odgovara naprezanjima u promatranoj ravnini.

Rotiranje tijela zajedno sa opterećenjem koje djeluje na njega ne mijenja Mohrovu kružnicu, ali mijenja položaj pola Mohrove kružnice.



D.4 Trag naprezanja. Srednje naprezanje i devijator naprezanja.

Pratimo li procese promjene naprezanja, trebao bi nam niz od beskonačno mnogo Mohrovih kružnica. U takvim je slučajevima u mehanici tla uobičajeno crtati samo vrh Mohrove kružnice, točku koja odgovara srednjem normalnom naprezanju i najvećem posmičnom. Krivulju koja se sastoji od tih točaka zovemo tragom naprezanja *(stress path)*. Ponekad se tako zove i promjena naprezanja, ne samo njen grafički prikaz.

Mohrova kružnica je prikaz naprezanja u jednoj ravnini. Zato pregledno opisuje naprezanja ako se radi o ravninskom stanju naprezanja ili o ravninskom stanju deformacija – kad nije bitan utjecaj naprezanja u ravnini okomitoj na ravninu u kojoj se događa deformiranje. Treća dimenzija može se dodati crtanjem Mohrovih kružnica za tri koordinatne ravnine: najčešće jednu horizontalnu i dvije okomite vertikalne ravnine. Te se Mohrove kružnice po dvije dodiruju na osi normalnih naprezanja – jer su oni zajednički za po dvije okomite ravnine.

Proračun naprezanja zahtijeva jednostavnije parametre. Najčešće su u uporabi dva parametra koji, pokazalo se, najpotpunije opisuju naprezanja u tlu na jednostavni način. To su srednje naprezanj i devijator naprezanja. Pri tome postoje dva različita para definicija u geotehnici. U novije vrijeme češće se radi sa slijedećim veličinama:

- ***srednje naprezanje*** *(mean stress)*, $p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$
- ***devijator naprezanja*** *(deviator stress)*,

$$q = [[(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2]/2 + 3(\tau^2_{xy}+\tau^2_{xy}+\tau^2_{xy})]^{1/2}$$

što je najčešće jednako

$$q = (\sigma_1 - \sigma_3)$$

U važnoj literaturi mehanike tla radi se sa dvije druge veličine istog naziva:

- ***srednje naprezanje*** *(mean stress)*, $s = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, što se ponekad također piše p,
- ***devijator naprezanja*** *(deviator stress)*, $t = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, što se ponekad također piše q,

Par s,t predstavlja vrh Mohrove kružnice i opisuje trag naprezanja pri promjeni stanja naprezanja.

 Udžbenik Tehničkog veleučilišta u Zagrebu, ISBN 953-7048-02-0

D.5 Preporučljiva literatura:

1. Despot, Z. bilješke predavanja *Tehnička mehanika*
2. Šimić,V., 1992, *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb
3. Nonveiller,E., 1990, *Mehanika tla i temeljenje građevina*, Školska knjiga, 823 str
4. *… ostala dostupna literatura iz područja tehničke mehanike, otpornosti materijala ili čvrstoće*

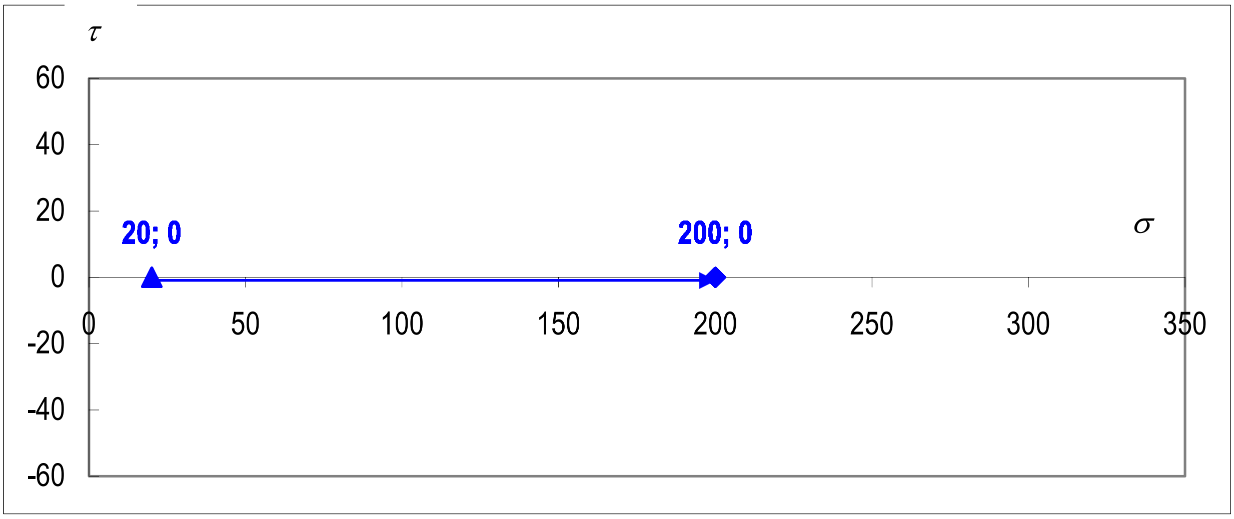
D.6 Zadaci

D.6.1 Mohrova kružnica za uzorak tla opterećen prvo izotropno, potom dodatno aksijalno

Uzorak tla promjera je 5 cm i visine 10 cm. Tijekom ugradnje u troosni uređaj (koji se opisuje detaljnije u poglavlju o Deformabilnosti i čvrstoći tla), da se zaštiti od nepovoljnog poremećivanja, uzorak se izvana zaštiti mekanom i tankom nepropusnom membranom, te se opterećuje (a) izotropno, sa naprezanjom σ_0 = 20kPa. Zatim, nakon zatvaranja uzorka u ćeliju, ćelija se ispuni vodom, te se nameće opterećenje na ćelijsku vodu, koja izotropno opterećuje uzorak. Opterećenje se postepeno povećava na (b) σ_3 = 200 kPa, što je srednja vrijednost naprezanja u tlu na mjestu vađenja uzorka. Da bi se ispitala deformabilnost datog tla uslijed gradnje, uzorak se potom (c) dodatno opterećuje aksijalnim vertikalnim opterećenjem, sve do sile od 2 kN. Treba iscrtati odgovarajuće Mohrove kružnice.

Ako je uzorak dobro pripremljen (*reconstituted specimen*) ili bez znatnog poremećivanja izrezan iz tla koje želimo ispitati (*unsdisturbed specimen*), te ako je bez znatnog poremećivanja transportiran i ugrađen u uređaj za ispitivanje, te ako je uzorak homogen, i spriječi se trenje na granicama uzorka, također i stanje naprezanja i deformacija homogeno je u cijelom uzorku. Obzirom na veličinu nametnutog opterećenja, vlastita težina uzorka zanemariva je.

(a)
Stanje naprezanja je izotropno, sva naprezanja u uzorku tla samo su tlačni, i svi su jednaki σ_0 = 20 kPa. Mohrovu kružnicu predstavlja točka na osi σ, gdje $\sigma = \sigma_0$ = 20kPa.



(b)
Ako je povećanje opterećenja dovoljno sporo da deformiranje uzorka bude homogeno, sva naprezanja u uzorku – u svim smjerovima – kontinuirano se povećavaju, od $\sigma = \sigma_0$ = 20 kPa, do $\sigma = \sigma_3$ = 200kPa. U svakom trenutku, Mohrova kružnica je točka na osi, od $\sigma = \sigma_3$ = 20 kPa, do $\sigma = \sigma_3$ = 200kPa. U Mohrovom dijagramu iscrtane su početna i krajnja Mohrova kružnica, te trag naprezanja duž osi σ.

(c)
Pri dodatnom aksijalnom vertikalnom opterećenju, horizontalna naprezanja u uzorku ostaju nepromijenjeni, a vertikalni se povećavaju. Mijenjaju se također i ostala naprezanja, u ostalim smjerovima tj. presjecima.

Za konačno stanje, gdje sila je 2000 N, dodatno vertikalno naprezanje, ili devijator naprezanja, izračunamo iz vrijednosti sile i poprečnog presjeka

$(5cm/2)^2 * \pi = 20cm^2$:

$\Delta\sigma = (2000\ N) / (20cm^2) = (2\ kN) / (20 * 10^{-4}\ m^2) = 10^{0-2+4}\ kN/m^2 = 10^2\ kPa = 100\ kPa$

Ako nema trenja ni na vertikalnim ni na horizontalnim plohama, horizontalna i vertikalna naprezanja su glavna naprezanja, tj. najmanje i najveće naprezanje.

Dakle, vertikalna naprezanja, na horizontalnim ravinama, maksimalno naprezanje u tom uzroku, jednaki su

$\sigma_1 = \sigma_3 + \Delta\sigma = 200kPa + 100\ kPa = 300\ kPa$

Horizontalna naprezanja, na vertikalnim ravninama, minimalna naprezanja u tom uzorku, jednaki su

$\sigma_3 = 200\ kPa$

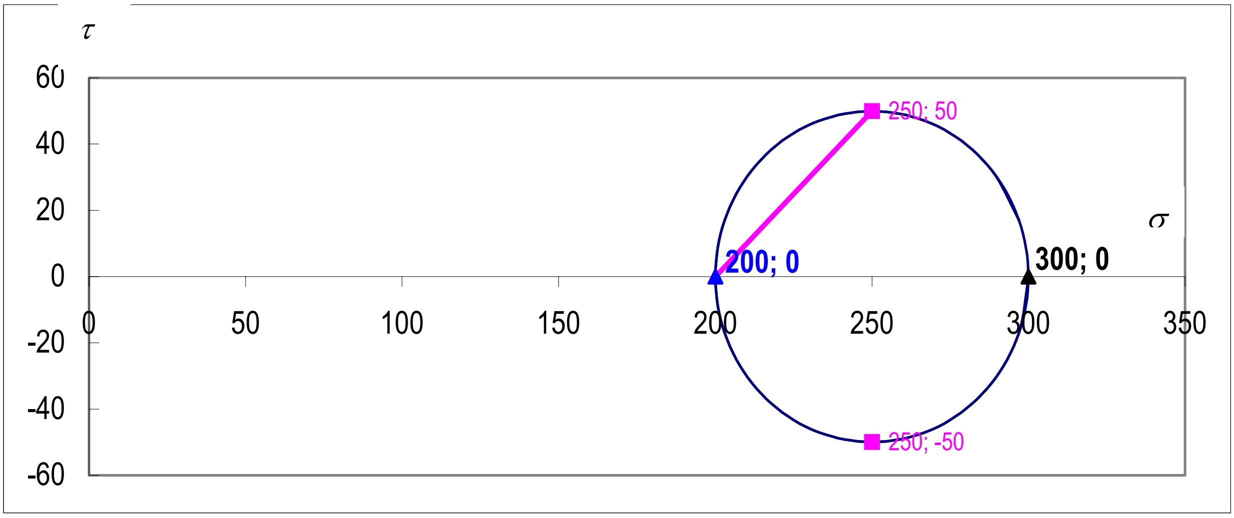
Mohrovu kružnicu crtamo između te dvije točke. Središte Morove kružnice je na osi σ, u

$(\sigma_1 + \sigma_3) / 2 = (300kPa + 200kPa) / 2 = 250\ kPa$

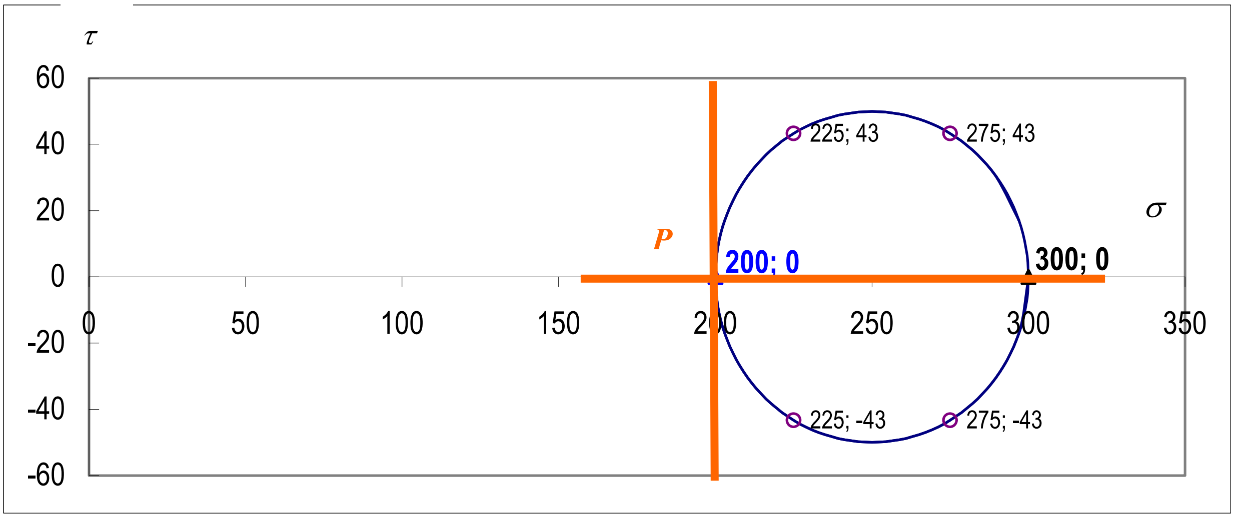
Radijus Mohrove kružnice jednak je

$\Delta\sigma / 2 = 100\ kPa / 2 = 50\ kPa$

U Mohrov dijagram ucrtan je i trag naprezanja tijekom nanošenja dodatne vertikalne sile.

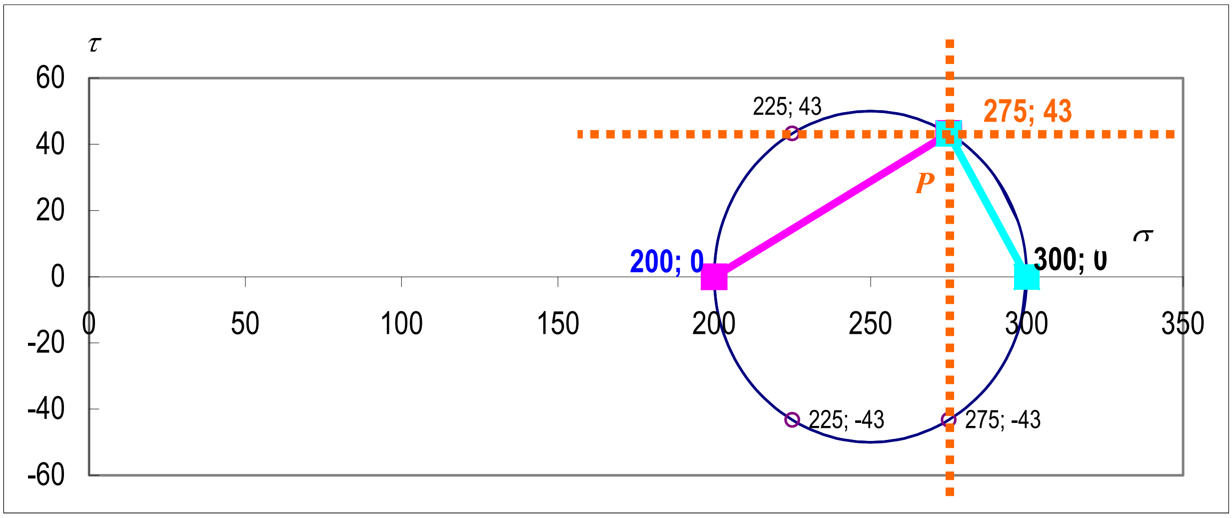


Pronađimo pol Mohrove kružnice. Horizontalno naprezanje, σ_3 djeluje u vertikalnoj ravnini, pa povucimo vertikalni pravac kroz točku (200;0) u Mohrovom dijagramu. Vertikalno naprezanje, σ_1 djeluje u horizontalnoj ravnini, pa povucimo horizontalni pravac kroz točku (200;0) u Mohrovom dijagramu. Pol Mohrove kružnice je u sjecištu ta dva pravca, u točki (200; 0). Tražimo li naprezanja u bilo kojoj ravnini promatranog elementa tla, povučemo toj ravnini paralelni pravac kroz pol Morove kružnice i očitamo (σ, τ). Na primjer pod kutem od 30º prema horizontali, očitavamo σ = 275 kPa; τ = ± 43 kPa. Pod kutem od 60º prema horizontali, očitavamo σ = 225 kPa; τ = ± 43 kPa.



D.6.2 Mohrova kružnica za zarotirano opterećenje

Pretpostavimo da uzorak iz prošlog zadatka, zajedno sa opterećenjem, zarotiramo za 30°. Slično će u tlu, za vrijeme gradnje, opterećenje na uzorak rasti, vertikalne i horizontalne ravnine neće nužno biti bez posmičnih naprezanja.



Očitajmo sad naprezanja u horizontalnim i vertikalnim ravninama:
Kroz pol Mohrove kružnice povlačimo paralelu traženoj ravnini, horizontalu, i očitavamo:

$\sigma =$ 225 kPa
$\tau =$ 43 kPa

Kroz pol Mohrove kružnice povlačimo paralelu traženoj ravnini, vertikalu, i očitavamo:

$\sigma =$ 275 kPa
$\tau =$ 43 kPa.

Jednako možemo očitati naprezanja i u bilo kojoj drugoj ravnini, ili možemo iz veličine naprezanja odrediti smjer ravnine.