

# I. PREDAVANJE

Osnovni pojmovi teorije mreža. Četiri postulata. Referentni smjerovi napona i struje elemenata mreže. Kirchhoffovi zakoni: Kirchhoffov zakon struje (KZS), Kirchhoffov zakon napona (KZN). Posljedice KZS-a i KZN-a. Poopćenje Kirchhoffovih zakona. Primjeri linearnih i nelinearnih transformacija. Dokaz Tellegenovog teorema. Zakon o očuvanju energije kao posebni slučaj Tellegenovog teorema.

## 1. UVOD

### 1.1 OSNOVNI POJMOVI

- **Električna mreža.** Skup električnih naprava (komponenata) međusobno spojenih vodičima tako da se za *zadane* poticaje ostvare *željeni* odzivi. Pod električkim napravama smatramo svrhovito izgrađene elektrotehničke objekte, primjerice: diode, kondenzatori, generatori, operacijska pojačala i dr.



Sl. 1.1 Električna mreža sa  $p$  poticaja i  $r$  odziva.

- **Analiza mreže.** Postupak kojim se za *zadanu mrežu* i *zadane poticaje* određuju odzivi. Analiza mreža jest inženjerska zadaća rješiva egzaktnim metodama na nivou modela.
- **Model.** Skup jednadžbi koji povezuje odabrane varijable analizirane pojave u električkoj napravi odnosno skupu električnih naprava (mreži). Ispitivanjima originala (stvarne mreže) provjerava se vjerodostojnost modela. I ako zanemarimo pogreške mjerne opreme te djelovanje mjerne opreme na rad ispitivane stvarne mreže, rezultati analize uvijek će se razlikovati od rezultata dobivenih ispitivanjima stvarne mreže. Ovu razliku u osnovi uvjetuju tri faktora neizbježno prisutna u svakom procesu izgradnje modela. To su:
  - neodređenost stvarne mreže, budući da sve varijable o kojima ovisi pojava nisu nikad poznate,
  - model predstavlja pojednostavljenje u odnosu na stvarnu mrežu budući da se uzimaju u obzir samo neke od poznatih varijabli stvarne mreže, i
  - model posjeduje neka svojstva koja stvarna mreža ne posjeduje.
- **Sinteza mreže.** Postupak kojim se za *zadane poticaje* i *zadane odzive* određuje (električna) mreža. Sinteza mreža je osnovna inženjerska zadaća. Nerješiva je egzaktnim metodama. Veliki broj provedenih analiza, prethodno iskustvo te intuicija omogućuju inženjeru da se snađe u problemima sinteze.

- **Maxwellov model.** Najpotpuniji opis pojava u elektrotehnici na osnovi kojeg je izgrađena **teorija elektromagnetskog polja**. Ovim modelom uzeta je u obzir činjenica da mreža zauzima dio realnog prostora, te da pri opisu pojava u mreži valja uzeti u obzir konačnu brzinu širenja elektromagnetskih pojava te ovisnost varijabli mreže o prostornim koordinatama.
- **Kirchhoffov model.** Pojednostavljeni Maxwellov model koji se s tehnički prihvatljivom točnošću može primijeniti na većinu u praksi važnih mreža. Na osnovi Kirchhoffovog modela izgrađena je **teorija mreža**. Pretpostavke s pomoću kojih se Maxwellov model svodi na Kirchhoffov model nazivaju se **postulati teorije mreža**.

1. Dimenzije (električnih) naprava kao i od njih stvorenih mreža zanemarene su u odnosu prema valnoj dužini koja odgovara najvišoj frekvenciji bitnoj za rad razmatranih naprava odnosno mreža.
2. Spojni vodiči između naprava beskonačne su vodljivosti i oko njih nema elektromagnetskog polja.
3. Rezultantni naboj svake naprave u mreži jednak je nuli.
4. Nema magnetske veze između naprava u mreži.

### Četiri postulata teorije mreža

- a) Na osnovi prvog postulata proizlazi da je svaka mreža koja se može opisati Kirchhoffovim modelom *prostorno malena*, tj. može se smatrati da se elektromagnetske pojave nakon pojave poticaja trenutno prošire cijelom mrežom. Zbog toga dimenzije naprava i njihov *fizički razmještaj ne utječu* na pojave u mreži te varijable mreže *ne trebaju ovisiti* o prostornim koordinatama.
  - b) Na osnovi ostalih postulata proizlazi da se svi fizikalni procesi *odvijaju samo unutar* naprava što znači da *izvan naprava ne postoji* elektromagnetsko polje.
- **Temeljne varijable Kirchhoffovog modela.** Naprave su međusobno elektromagnetski odvojene i u kontaktu su samo s pomoću vodiča spojenih između priključaka naprava. To znači da se sva svojstva naprava mogu iskazati samo s pomoću varijabli definiranih na priključcima naprava. To su:

- **naponi između priključaka**  $u(t)$ , definirani razlikom potencijala priključaka,
- **struje priključaka**  $i(t)$ , te njihove integralne veličine

$$\text{- naboj} \quad q(t) = \int_{-\infty}^t i(x) dx$$

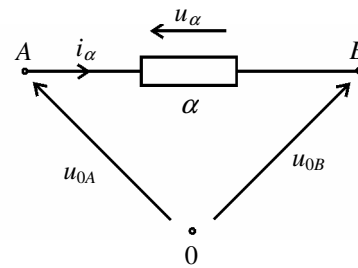
$$\text{- tok} \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^t u(x) dx$$

Pri tome pretpostavljamo da su vrijednosti varijabli naboja i toka u trenutku  $t = -\infty$  jednake nuli, tj. sa  $t = -\infty$  označen je trenutak kad je promatrana mreža (model) stvorena.

- **Element mreže.** Model kojim je predočen *jedan fizikalni proces* u napravi.
  - a) **Otpor** – njime je predočen proces *pretvorbe električne energije* u neki drugi oblik kao i obratni proces.
  - b) **Kapacitet** – njime je predočen proces *uskladištenja elektrostaticke energije*.
  - c) **Induktivitet** – njime je predočen proces *uskladištenja magnetske energije*.
- **Konstitutivna relacija elementa mreže.** Veza između temeljnih varijabli Kirchhoffovog modela definiranih na priključcima elemenata mreže koja vrijedi za *bilo koji poticaj* i u *bilo kojem trenutku*. Element mreže sa dva priključka opisan je funkcijskom vezom između *dviju temeljnih varijabli*.
- **Kirchhoffova mreža.** Mreža sastavljena od elemenata mreže. Dobiva se iz stvarne mreže tako da se svaka naprava zamijeni skupom elemenata mreže i ti se skupovi elemenata mreže međusobno spoje na isti način kako su spojene naprave u stvarnoj mreži. U elektrotehnici se ovako stvorena mreža zove *nadomjesna shema spoja* stvarne mreže. Kirchhoffove se mreže često nazivaju i *mreže sa zbijenim* (koncentriranim) *elementima*.
- **Teorija mreža.** Grana elektrotehnike koja se bavi analizom i sintezom Kirchhoffovih mreža. U nastavku baviti ćemo se samo dijelom teorije mreža i to onim koji se odnosi na analizu mreža. Pod pojmom mreže smatrat ćemo, osim ako se izričito ne navede drukčije, model mreže. Zamjena naprava skupovima elemenata mreže tj. modeliranje naprava *nije* predmet teorije mreža.

## 1.2 REFERENTNI SMJEROVI NAPONA I STRUJE ELEMENTA MREŽE

Analizi bilo koje mreže prethodi pridjeljivanje referentnih smjerova napona i struje svakom elementu mreže. Iako je izbor referentnog smjera napona posve neovisan o izboru referentnog smjera struje, zgodno je odabrati tzv. *pridružene referentne smjerove*, slika 1.2.



Sl. 1.2 Pridruženi referentni smjerovi napona i struje.

Referentni smjer napona  $u_\alpha$  i struje  $i_\alpha$  elemenata mreže  $\alpha$  pridruženi su ako pozitivna struja  $i_\alpha$  ulazi u element mreže  $\alpha$  na priključku A, a izlazi na priključku B, s time da je u odnosu na neku po volji odabranu točku referencije 0 razlika napona između priključaka A i B pozitivna, tj. da vrijedi:

$$u_{0A} - u_{0B} > 0 \quad (1)$$

Ako sa nakon analize mreže dobije da se u nekom trenutku  $t_0$  stvarni smjerovi napona i struje elemenata mreže  $\alpha$  *podudaraju* s pridruženim ili su oba suprotna od pridruženih, bit će:

$$p_\alpha(t_0) = u_\alpha(t_0)i_\alpha(t_0) > 0 \quad (1a)$$

Element mreže  $\alpha$  ponaša se u trenutku  $t_0$  kao *trošilo*, tj. prima električnu energiju iz drugih dijelova mreže. U protivnom bit će:

$$p_\alpha(t_0) = u_\alpha(t_0)i_\alpha(t_0) < 0 \quad (1b)$$

i element mreže  $\alpha$  se u trenutku  $t_0$  ponaša kao *izvor*, tj. predaje električnu energiju drugim dijelovima mreže. Razmatranje se može proširiti na po volji odabran interval  $(t_0, t)$  pa vrijedi:

$$\int_{t_0}^t u_\alpha(x)i_\alpha(x) dx \begin{cases} > 0 & \text{trošilo} \\ < 0 & \text{izvor} \end{cases} \quad (2)$$

## 1.3 KIRCHHOFFOVI ZAKONI (G.Kirchhoff, 1847.)

### 1.3.1 Kirchhoffov zakon struje (KZS)

U skladu s trećim postulatom rezultatni naboj svake naprave u mreži jednak je nuli. To znači da je algebarski zbroj struja svih priključaka neke naprave u bilo kojem trenutku jednak nuli.

Za  $j$ -tu napravu  $N_j$  sa  $m$ -priključaka, slika 1.3, vrijedi da je:

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} i_k = 0 \quad (3)$$

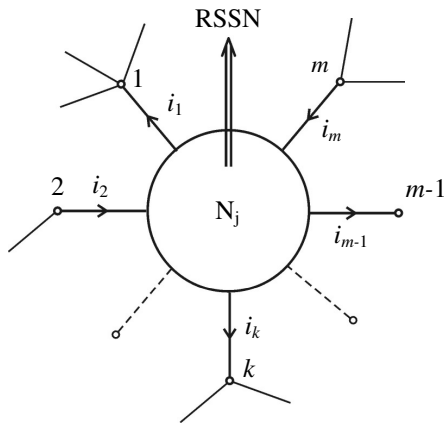
gdje je:

$$a_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{ako se RSSN podudara sa RS struje } k \text{ - tog} \\ & \text{priključka} \\ -1 & \text{ako se RSSN ne podudara sa RS struje } k \text{ - tog} \\ & \text{priključka} \\ 0 & \text{ako } k \text{ - ti priključak nije spojen na ostale dijelove} \\ & \text{mreže} \end{cases}$$

RSSN - skraćenica za referentni smjer struje naprave

RS - skraćenica za referentni smjer

Ono što vrijedi za svaku napravu vrijedi i za njen model,



Sl. 1.3 Uz objašnjenje referentnog smjera struje naprave (RSSN).

Od označenih struja  $a_{j1}=a_{jk}=a_{jm-1}=+1$ ,  $a_{j2}=a_{jm}=-1$ .

što znači da za svaki dio mreže koji je s pomoću  $m$  priključaka spojen na ostatak mreže vrijedi izraz (3).

Definiramo li *čvor* kao mjesto spoja priključaka dviju ili više naprava mreže (elemenata mreže), to će izraz (3) vrijediti i za svaki čvor stvarne mreže kao i za njen model. Vrijedi:

Kirchhoffov zakon struje (KZS)

Za svaku Kirchhoffovu mrežu, za svaki od njenih čvorova, u bilo kojem trenutku, algebarski zbroj struja grana spojenih na isti čvor jednak je nuli.

Pri tome se pod *granom* smatra dio mreže koji se sastoji od jednog ili više elemenata mreže spojenih između jednog para priključaka.

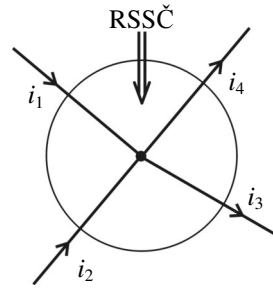
Analogno izrazu (3), KZS se može iskazati u obliku:

$$\sum_{k=1}^b a_{jk} i_k = 0 \quad \text{za } j \text{ - ti čvor} \quad (4)$$

gdje je:

$$a_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{ako se RSSČ podudara sa RS struje } k \text{ - te grane} \\ -1 & \text{ako se RSSČ ne podudara sa RS struje } k \text{ - te grane} \\ 0 & \text{ako } k \text{ - ta grana nije spojena na } j \text{ - ti čvor} \end{cases}$$

pri čemu je sa RSSČ označen referentni smjer struje  $j$ -tog čvora, a sa  $b$  ukupni broj grana mreže.



$$\text{Vrijedi: } i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0$$

Sl. 1.4 Uz objašnjenje referentnog smjera struje čvora.

### 1.3.2 Kirchhoffov zakon napona (KZN)

Kirchhoffov zakon napona jest posebni slučaj Faradayevog zakona. Faradayev zakon izriče da je zbroj svih napona u nekoj petlji jednak brzini promjene magnetskog toka ulančanog tom petljom.

No, prema drugom i četvrtom postulatu teorije mreža izvan naprava nema elektromagnetskog polja što znači da u Kirchhoffovom modelu neke mreže ne postoji niti jedna petlja prožeta promjenljivim magnetskim tokom. Vrijedi:

Kirchhoffov zakon napona (KZN)

Za svaku Kirchhoffovu mrežu, za svaku njenu petlju, u bilo kojem trenutku, algebarski zbroj napona grana duž jedne petlje jednak je nuli.

Pojam petlje bit će objašnjen kasnije. Intuitivno je *petlja* zatvoreni put duž mreže, tj. put koji nastaje tako da krenemo od jednog čvora prolazeći nizom grana, ali tako da se vratimo u polazni čvor, ne prolazeći nikada dvaput istim čvorom.

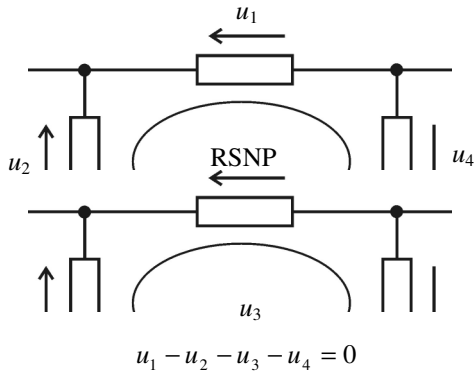
KZN se iskazuje u obliku:

$$\sum_{k=1}^b b_{jk} u_k = 0 \quad \text{za } j \text{ - tu petlju} \quad (5)$$

gdje je

$$b_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{ako se RSNP podudara sa RS napona } k \text{ - te grane} \\ -1 & \text{ako se RSNP ne podudara sa RS napona } k \text{ - te} \\ & \text{grane} \\ 0 & \text{ako se } k \text{ - ta grana ne nalazi u sastavu } j \text{ - te petlje} \end{cases}$$

pri čemu je sa RSNP označen referentni smjer napona  $j$ -te petlje, a sa  $b$  ukupni broj grana mreže.



Sl. 1.5 Uz objašnjenje referentnog smjera napona petlje.

### 1.3.3 Posljedice Kirchhoffovih zakona

- Sve struje u granama mreže *nisu* međusobno nezavisne.
- Svi naponi grana mreže *nisu* međusobno nezavisni.
- Struje i naponi grana *ograničeni* su jednadžbama koje proizlaze iz primjene KZS-a i KZN-a na analiziranu mrežu. Ove jednadžbe ne ovise o karakteru elemenata koji tvore mrežu nego samo o *grafu* mreže. Pod grafom se smatra grafički prikaz mreže i sastoji se od čvorova i linijskih segmenata kojima su prikazane grane.
- Kirchhoffovi zakoni vrijede ne samo za trenutne vrijednosti struja i napona, kako je to dano izrazima (4) i (5), nego i za *sve linearne transformacije* ovih izraza.

Označimo li sa  $A_i$  linearni operator koji djeluje na struje a sa  $A_u$  linearni operator koji djeluje na napone mreže, Kirchhoffovi zakoni poprimaju oblik:

$$\sum_{k=1}^b a_{jk} A_i(i_k) = 0 \quad \text{za } j\text{-ti čvor} \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^b b_{jk} A_u(u_k) = 0 \quad \text{za } j\text{-tu petlju} \quad (7)$$

Primjeri:

- Budući da je integriranje linearna transformacija, te ako sa

$$I_k(0) = \frac{1}{T} \int_0^T i_k dt \quad ; \quad U_k(0) = \frac{1}{T} \int_0^T u_k dt$$

označimo srednje vrijednosti struje odnosno napona  $k$ -te grane, gdje je sa  $T$  označena perioda rada, dobivamo da Kirchhoffovi zakoni **vrijede i za srednje vrijednosti**.

$$\sum_{k=1}^b a_{jk} I_k(0) = 0 \quad \text{za } j\text{-ti čvor} \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^b b_{jk} U_k(0) = 0 \quad \text{za } j\text{-tu petlju}$$

- Određivanje efektivne vrijednosti *nije* linearna transformacija varijabli  $i_k$  i  $u_k$ , tj.

$$I_k = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt} \quad ; \quad U_k = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u_k^2 dt}$$

Zbog toga Kirchhoffovi zakoni u općem slučaju **ne vrijede za efektivne vrijednosti**. Dakle,

$$\sum_{k=1}^b a_{jk} I_k \neq 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^b b_{jk} U_k \neq 0$$

### 1.4. TELLEGENOV TEOREM (B.D.H. Tellegen, 1952.)

Pretpostavimo *dvije mreže*  $M_1$  i  $M_2$  koje su međusobno slične samo po tome što imaju *isti graf*, a time i jednaki broj grana  $b$  i čvorova  $n$ . Označimo napon  $k$ -te grane mreže  $M_1$  sa  $u_k$  a struju  $k$ -te grane mreže  $M_2$  sa  $\bar{i}_k$ . Pitamo se čemu je jednak izraz

$$\sum_{k=1}^b u_k \bar{i}_k$$

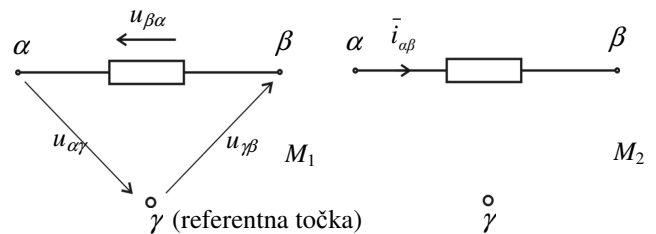
Označimo napone i struje svake grane dvojnim indeksima koji odgovaraju oznakama čvorova. Tada je

$$\sum_{k=1}^b u_k \bar{i}_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n u_{\beta\alpha} \bar{i}_{\alpha\beta} \quad (9)$$

U dvostrukoj sumi produkt  $u_k \bar{i}_k$  svake grane pojavljuje se dva puta. Tako, primjerice za granu 2 između čvorova 3 i 6 vrijedi da je

$$u_2 \bar{i}_2 = \frac{1}{2} (u_{36} \bar{i}_{36} + u_{63} \bar{i}_{63})$$

Očigledno je  $u_{63} = -u_{36}$ , odnosno  $\bar{i}_{63} = -\bar{i}_{36}$  što objašnjava zašto se ispred dvostruke sume pojavljuje faktor  $1/2$ .



Sl. 1.6 Uz dokaz Tellegenovog teorema

U skladu sa KZN, a koristeći oznake dane na slici 1.6 vrijedit će da je

$$u_{\beta\alpha} + u_{\alpha\gamma} + u_{\gamma\beta} = 0$$

što uvršteno u (9) daje

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n (u_{\alpha\gamma} + u_{\gamma\beta}) \bar{i}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n u_{\alpha\gamma} \sum_{\beta=1}^n \bar{i}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^n u_{\gamma\beta} \sum_{\alpha=1}^n \bar{i}_{\alpha\beta}$$

jer se redosljed zbrajanja u dvostrukoj sumi smije mijenjati. No, prema KZS-u je

$$\sum_{\beta=1}^n \bar{i}_{\alpha\beta} = 0 \quad ; \quad \sum_{\alpha=1}^n \bar{i}_{\alpha\beta} = 0$$

budući da prva suma predstavlja zbroj struja u čvoru  $\alpha$ , a druga zbroj struja u čvoru  $\beta$ . Proizlazi da je

$$\sum_{k=1}^b u_k \bar{i}_k = 0 \quad (10)$$

Ovaj se izraz naziva **Tellegenov teorem**. Iz Tellegenovog teorema proizlazi:

- a) Umjesto dviju mreža  $M_1$  i  $M_2$  pretpostavimo jednu mrežu  $M$ . Ako se vrijednosti napona i struje  $k$ -te grane odnose na isti trenutak proizlazi iz (10) da je

$$\sum_{k=1}^b u_k(t) i_k(t) = 0 \quad (11)$$

što je s pomoću snaga izražen **zakon o očuvanju energije**. Budući da je za izvod Tellegenovog teorema bitno *samo* da važe Kirchhoffovi zakoni, to se ovi zakoni mogu shvatiti i kao drugi način iskaza zakona o očuvanju energije.

- b) Kirchhoffovi zakoni vrijede za sve linearne transformacije varijabli napona i struja. Zbog toga se i Tellegenov teorem u najopćenitijem obliku može napisati u obliku

$$\sum_{k=1}^b A_u(u_k) \cdot A_i(\bar{i}_k) = 0 \quad (12)$$