

II. PREDAVANJE

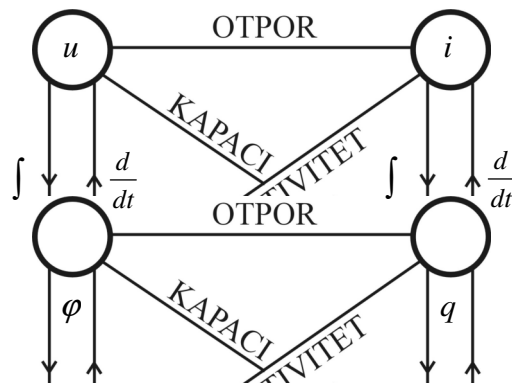
Vrste elemenata mreže: otpor, kapacitet, induktivitet, Memristor kao četvrti element mreže. Definicija otpora. Podjela otpora: linearni/nelinearni, vremenski promjenljivi/vremenski nepromjenljivi, upravljani strujom/upravljani naponom i monotoni otpori, aktivni/pasivni. Aktivni otpori: nezavisni naponski izvori, nezavisni strujni izvori, zavisni izvori. Pasivni otpori: striktno pasivni, lokalno aktivni. Svojstva pasivnih otpora: jalova snaga, nove frekvencije, pojačanje, upravljanje snagom. Svojstva aktivnih otpora: nelinearnost, reverzibilnost. Opstojnost linearnog aktivnog otpora. Položaj nezavisnih izvora u mreži. Naponski izvor kao poopceni kratki spoj. Strujni izvor kao poopceni prekid. Uvjet nepromjenljivosti strukture mreže.

I. ELEMENTI MREŽE

Element mreže je model kojim je predočen *jedan fizikalni proces* u električkoj napravi. U električkim napravama za koje vrijedi Kirchhoffov model razlikuju se *tri fizikalna procesa*: pretvorba električne energije u drugi oblik i obratno, uskladištenje elektrostatičke energije i uskladištenje magnetske energije. Zbog toga postoje i *tri odgovarajuća elementa mreže*: *otpor, kapacitet i induktivitet*.

S druge strane, element mreže definiran je funkcijskom vezom između dviju temeljnih varijabli Kirchhoffovog modela mreže. Od četiri temeljne varijable (u, i, q, φ) može se stvoriti šest različitih parova varijabli. Pri tome su dva para (u, φ) i (i, q) već povezani relacijama $u = d\varphi/dt$ i $i = dq/dt$, te preostala četiri para daju *četiri elementa mreže*. To su: (u, i)-otpor, (u, q)-kapacitet, (i, φ)-induktivitet i (φ, q)-memristor.

Formalno uvedeni četvrti element mreže *memristor* (Chua, 1971.) može se realizirati samo s pomoću ostalih elemenata mreže. Linearni memristor identičan je linearnom otporu, dok nelinearni memristor posjeduje svojstvo pamćenja; odatle mu i potječe naziv (*memory resistor*).



Sl. 2.1 Veze između temeljnih varijabli.

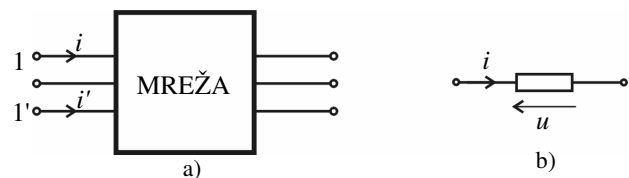
2. JEDNOPRILAZNI DISIPATIVNI ELEMENTI (OTPORI)

2.1 OSNOVNI POJMOVI

- **Prilaz.** Svaki par priključaka elementa mreže sa svojstvom da je za svaki trenutak t struja koja ulazi u jedan od priključaka jednaka struji koja izlazi iz drugog priključaka.
- **Jednoprilaz.** Element mreže sa dva priključka.
- **Jednoprilazni disipativni element (otpor).** Jednoprilaz kojem se za bilo koji *poticaj*, u bilo kojem *trenutku* t , napon i struja mogu prikazati krivuljom u ravnini u - i .

$$\mathcal{R} = \{ (u, i); f(u, i, t) = 0 \} \quad (1)$$

Funkcija $f(u, i, t) = 0$ naziva se *karakteristikom otpora u trenutku* t .



Sl. 2.2 a) Priključci 1 i 1' tvore jednoprilaz ako je $i + i' = 0$
b) Simbol jednoprilaznog otpora.

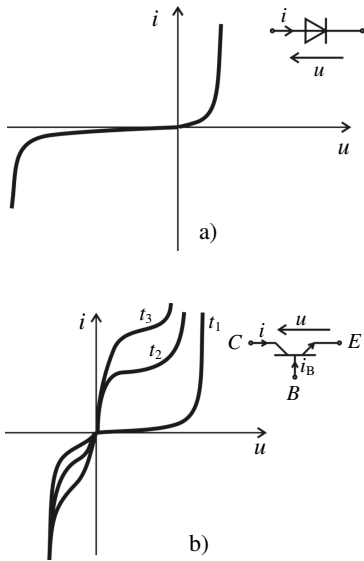
2.2 PODJELA OTPORA

2.2.1 Vremenska promjenljivost / nepromjenljivost (VP/VNP)

Otpor je vremenski promjenljiv ako se u njegovoj karakteristici eksplicitno pojavljuje nezavisna varijabla t ,

izraz (1). U protivnom otpor je vremenski nepromjenljiv, zadan izrazom:

$$\mathcal{R} = \{(u, i); f(u, i) = 0\}$$



Sl. 2.3 a) Dioda kao vremenski nepromjenljivi otpor.
b) Bipolarni tranzistor kao vremenski promjenljivi otpor.
Parametar: struja baze u tri trenutka,
 $i_B(t_1) < i_B(t_2) < i_B(t_3)$.

2.2.2 Linearost / nelinearnost (L/NL)

- a) Otpor je *linearan* ako se njegova karakteristika može prikazati linearnom funkcijom, tj. funkcijom koja zadovoljava

- svojstvo homogenosti

$$f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \alpha = \text{konst.} \quad (2a)$$

- svojstvo aditivnosti

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \quad (2b)$$

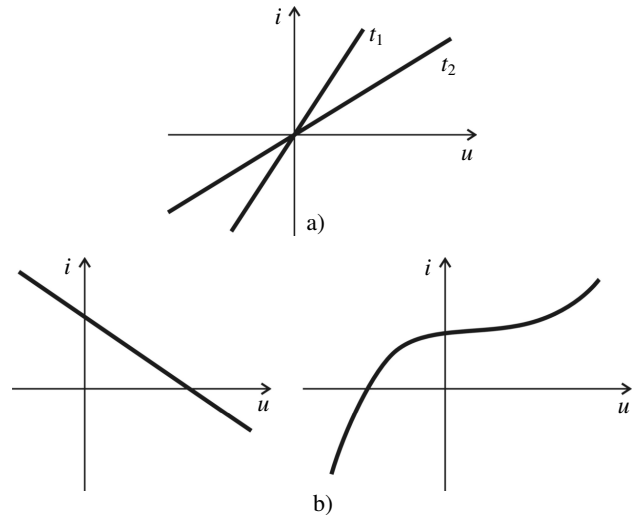
Oba svojstva zajedno u elektrotehnici tvore **načelo superpozicije**. Proizlazi da je otpor linearan ako vrijedi:

$$f(u, i) = u - Ri = 0 \quad ; \quad f(u, i, t) = u - R(t)i = 0 \quad (3)$$

Ovaj se izraz naziva **Ohmov zakon**. (G. S. Ohm, 1827.)

- b) Otpori koji ne zadovoljavaju uvjete (2) su *nelinearni*.
c) Dva važna primjera linearnih i vremenski nepromjenljivih otpora su:

- **kratki spoj** ; $u = 0$, struja po volji
- **prekid** ; $i = 0$, napon po volji



Sl. 2.4 a) Primjer linearnog i vremenski promjenljivog otpora.
b) Dva primjera nelinearnog i vremenski nepromjenljivog otpora.

2.2.3 Upravljanost

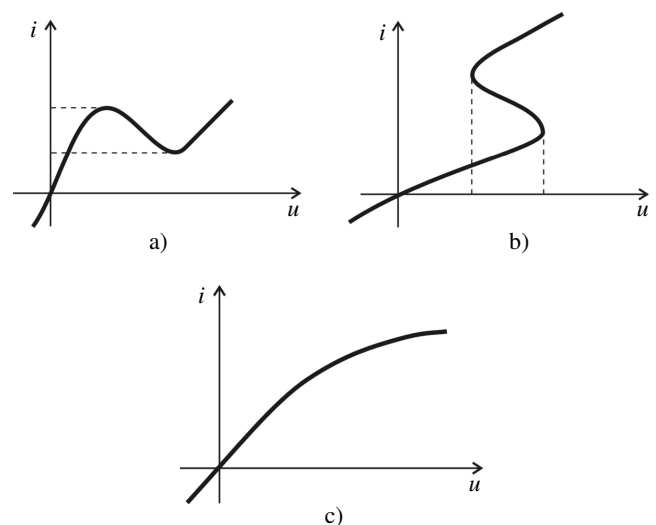
- a) Otpor je *naponom upravljani* ako se struja otpora može izraziti kao jednoznačna funkcija napona na otporu, tj.

$$i(t) = f[u(t), t]$$

- b) Otpor je *strujom upravljani* ako se napon na otporu može izraziti kao jednoznačna funkcija struje otpora, tj.

$$u(t) = g[i(t), t]$$

- c) Otpor je *monoton* ako je i strujno i naponski upravljani.



Sl. 2.5 a) Naponom upravljani otpor (tunnel dioda).
b) Strujom upravljani otpor (plinom punjena cijev).
c) Monotoni otpor.

2.2.4 Aktivnost / pasivnost

U skladu s izborom pridruženih referentnih smjerova (poglavlje 1.2) vrijediti će:

$$p_a(t) = u_a(t) \cdot i_a(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{pasivni otpor (trošilo)} \\ < 0 & \text{aktivni otpor (izvor)} \end{cases}$$

Posljedice:

- Da bi otpor bio **pasivan** karakteristika mu se mora nalaziti samo u I. i III. kvadrantu u-i ravnine, dakle mora prolaziti kroz ishodište.
- Da bi otpor bio **aktivan** karakteristika mu ne smije prolaziti kroz ishodište.

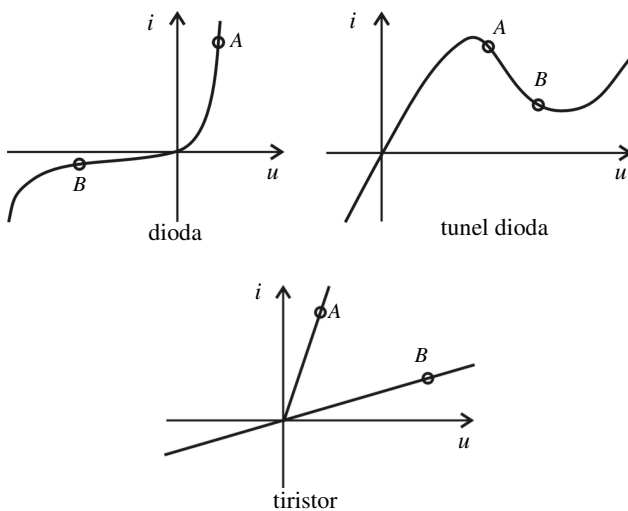
2.2.4.1 Podjela pasivnih otpora

- Otpor je **striktno pasivan** ako za bilo koje dvije točke A i B odabrane na njegovoj karakteristici vrijedi:

$$[u_A(t_1) - u_B(t_2)][i_A(t_1) - i_B(t_2)] \geq 0 \quad (4)$$

- Otpor je **lokalno aktivan** odnosno **kvaziaktivan** ako se na njegovoj karakteristici mogu pronaći dvije točke A i B za koje vrijedi da je:

$$[u_A(t_1) - u_B(t_2)][i_A(t_1) - i_B(t_2)] < 0 \quad (5)$$



Sl. 2.6 Dioda kao primjer striktno pasivnog otpora, te tunnel dioda i tiristor kao primjeri kvaziaktivnih otpora.

2.2.4.2 Podjela aktivnih otpora

Aktivni otpori (izvori) dijele se na **nezavisne** i na **zavisne** izvore. Kod nezavisnih izvora zadan je ili valni oblik napona $u(t)$ ili valni oblik struje $i(t)$ koji ne ovise o ostalim elementima mreže. Razlikujemo:

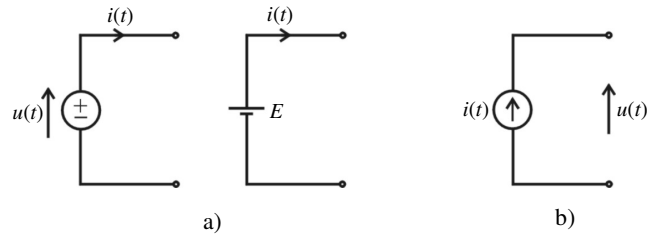
- nezavisni naponski izvor:**

$$u(t) = \text{zadano} \quad ; \quad i(t) = \text{po volji} \quad (6)$$

- nezavisni strujni izvor**

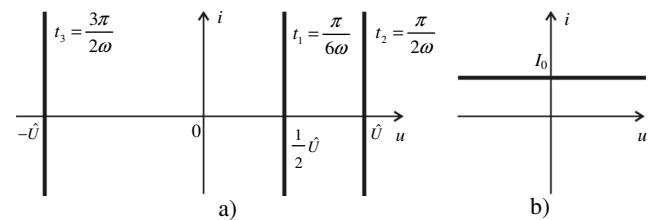
$$i(t) = \text{zadano} \quad ; \quad u(t) = \text{po volji} \quad (7)$$

Nezavisnim izvorima uobičajeno se pridjeljuju referentni smjerovi suprotni pridruženim referentnim smjerovima. Pod tim uvjetima, slika 2.7, umnožak $u(t)i(t)$ znači snagu koju nezavisni izvor odaje mreži koja je na njega priključena.



Sl.2.7 a) Uobičajeni simboli općeg i istosmjernog nezavisnog naponskog izvora.
b) Uobičajeni simbol općeg nezavisnog strujnog izvora.

Slika 2.8 pokazuje karakteristike dvaju nezavisnih izvora.



Sl. 2.8 a) Karakteristika nezavisnog naponskog izvora $u = \hat{U} \sin \omega t$ u nekoliko odabranih trenutaka.
b) Karakteristika nezavisnog strujnog izvora $i = I_0$.

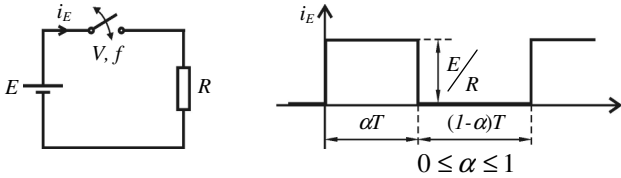
Kod zavisnih izvora razlikujemo također zavisne naponske izvore od zavisnih strujnih izvora. Njihove konstitutivne relacije također su dane izrazima (6) odnosno (7), s tim da je, recimo, kod zavisnog naponskog izvora valni oblik napona zadan relacijom koja ga povezuje s nekom strujom ili nekim naponom u mreži. Analogno vrijedi i za zavisne strujne izvore. O tome više u poglavlju 4!

Napomena: Uobičajeno je da se kod navođenja vrsta nezavisnih izvora pridjev "nezavisan" izostavlja tako da je dovoljno navesti samo naponski ili strujni izvor, dok se kod navođenja vrsta zavisnih izvora ili navede pridjev "zavisan" ili se navede varijabla o kojoj ovisi valni oblik napona ili struje izvora, recimo strujom upravljani naponski izvor.

2.3 SVOJSTVA PASIVNIH OTPORA

2.3.1 Jalova snaga (S.Fryze, 1932.)

Pojavu jalove snage pokažimo na primjeru mreže sheme spoja prema slici 2.9.



Sl. 2.9 Periodički upravljana sklopka V uklapa / isklapa linearni vremenski nepromjenljivi otpor R . Frekvencija sklapanja $f=1/T$.

Djelatna (srednja) snaga izvora je:

$$P_E = \frac{1}{T} \int_0^T E i_E dt = \alpha \frac{E^2}{R} \quad (8)$$

dok je prividna snaga izvora

$$S_E = E \cdot I_E = E \cdot \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_E^2 dt} = \sqrt{\alpha} \frac{E^2}{R} \quad (9)$$

Kako je $\alpha \leq 1$, opažamo da je

$$S_E \geq P_E$$

što znači da se u mreži sheme spoja prema slici 2.7 pojavila jalova snaga!

Prema Fryze-u, u skladu s Cauchy-Bunjakovskoga jednakošću za neki element mreže α vrijedi

$$S_\alpha^2 = P_\alpha^2 + \underbrace{\frac{1}{2T} \int_0^T \int_0^T [u_\alpha(t) i_\alpha(\tau) - u_\alpha(\tau) i_\alpha(t)]^2 dt d\tau}_{Q_\alpha^2} \quad (10)$$

Jalova snaga elementa mreže α jednaka je nuli samo ako je

$$u_\alpha(t) i_\alpha(\tau) - u_\alpha(\tau) i_\alpha(t) = 0$$

Kako su t i τ nezavisne varijable, to je ovaj uvjet moguće zadovoljiti samo ako je

$$\frac{u_\alpha(t)}{i_\alpha(t)} = \frac{u_\alpha(\tau)}{i_\alpha(\tau)} = konst. = R$$

Proizlazi:

Svaki pasivni otpor osim linearnog vremenski nepromjenljivog otpora uzrokuje pojavu jalove snage u mreži.

2.3.2 Nove frekvencije

Ako se u prethodnom primjeru, slika 2.9, valni oblik struje razvije u Fourierov red dobit će se da je

$$i_E(t) = I_E(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_E(n) \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

gdje je $\omega = 2\pi/T$. U istosmjernom krugu dobivene su nove frekvencije.

Analogno bi se to moglo pokazati i za nelinearne vremenski nepromjenljive otpore.

Ako je otpor linearan i vremenski nepromjenljiv vrijedi da je

$$u(t) = Ri(t)$$

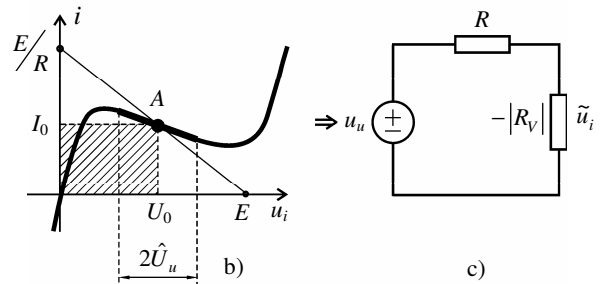
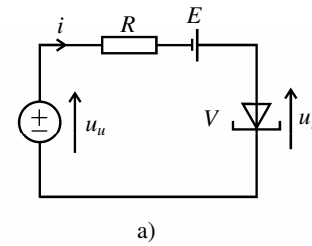
i očigledno je da je to jedini slučaj kada se neće pojaviti nove frekvencije. Proizlazi:

Svaki pasivni otpor osim linearnog vremenski nepromjenljivog otpora uzrokuje pojavu novih frekvencija u mreži.

2.3.3 Pojačanje

Pojačanje je proces u kojem je izlazni signal (posljedica) veći od ulaznog signala (uzroka). Energetski gledano, ovo je moguće samo ako se potrebna energetska razlika preuzme iz dodatnog izvora. Uobičajeno, izmjenični signal se pojača na račun energije iz istosmjernog izvora, što znači da dolazi do pretvorbe snage na frekvenciji.

Kasnije će biti pokazano da je pretvorba istosmjerne snage u izmjeničnu moguća samo s pomoću kvaziaktivnih otpora. Pokažimo to na jednom primjeru.



Sl. 2.10 Uz objašnjenje pojačanja na primjeru sklopa s tunnel diodom.

Pretpostavimo da je na sklop prema slici 2.10a narinut izmjenični napon $u_u = \hat{U}_u \sin \omega t$ te da je "hod" signala $u_u(t)$ "malen" tj. da se karakteristika tunnel diode u okolišu radne točke A može zamijeniti linearnim negativnim otporom $-|R_V|$.

Promatrano samo sa stajališta "malog" harmonijskog signala, vrijedi da je

$$\tilde{u}_i = -\frac{|R_V|}{R - |R_V|} u_u$$

što za $|R_v| > \frac{1}{2}R$ omogućava pojačanje, tj. da je $|\hat{U}_i| > \hat{U}_u$.

Istosmjerni izvor pokriva gubitke u radnoj točki $U_0 I_0$ te dodatnu energiju potrebnu za ostvarenje izlaznog signala.

Zaključujemo:

Svaki kvaziaktivni otpor omogućuje pojačanje izmjeničnog signala na račun dodatnog istosmjernog izvora.

2.3.4 Upravljanje snagom

U primjeru danom na slici 2.9 vidimo da se mijenjajući trajanje uklopljenog stanja α može upravljati snagom trošila, izraz (8). Ovo vrijedi i općenito:

Svaki vremenski promjenljivi otpor omogućuje upravljanje snagom.

2.4 SVOJSTVA AKTIVNIH OTPORA

Aktivni otpori su *nelinearni otpori*. Primjeri: akumulator i istosmjerni generator su nelinearni vremenski nepromjenljivi otpori, dok je izmjenični generator nelinearni vremenski promjenljivi otpor. U Teoriji mreža se dodatno pretpostavlja da su aktivni otpori *reverzibilni*, tj. da vrijedi

$$p_a(t) < 0, \text{ ali } i p_a(t) > 0.$$

Pitanje: Je li moguće **linearni aktivni otpor** ?

U skladu s izloženim u 2.2.2 i 2.2.4 to izgleda nemoguće, budući da linearnost zahtijeva da karakteristika bude pravac kroz ishodište, a aktivnost da karakteristika ne smije proći kroz ishodište.

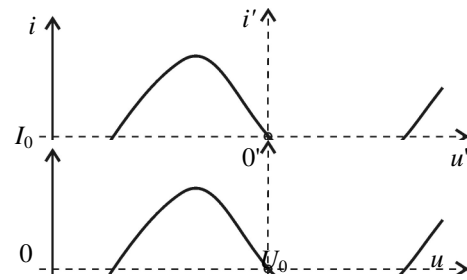
Ovu kontradikciju možemo izbjeći samo ako se aktivnost nekog otpora definira u odnosu na neku pogodno odabranu fiksnu točku njegove karakteristike (U_0, I_0) tako da u okolišu točke (U_0, I_0) vrijedi da je

$$(u - U_0)(i - I_0) < 0$$

Ovo je i pokazano u odsječku 2.3.3 gdje je tunnel dioda u okolišu radne točke zamijenjena linearnim negativnim otporom, drugim riječima linearnim aktivnim otporom. No, to je moguće samo uz pomoć *dodatnog izvora energije*.

Na slici 2.10.c mi smo u stvari pretpostavili karakteristiku nelinearnog otpora u novom koordinatnom sustavu $u'-i'$ čije je ishodište smješteno u točku (U_0, I_0) iz starog koordinatnog sustava $u-i$, sl. 2.11. Očigledno je tunnel-dioda u novom koordinatnom sustavu, u okviru zadanog hoda narinutog signala, *linearni aktivni otpor*.

Linearni aktivni otpori jednostavno se realiziraju s pomoću višeprilaznih otpora (poglavlje 4). Njihovu aktivnost jamči dodatni energetski izvor, karakteristike kojeg se *ne pojavljuju* u opisu linearnog aktivnog otpora. Tako primjerice u izrazu za snagu linearnog aktivnog otpora



Sl. 2.11 K objašnjenju pojma linearnog aktivnog otpora.

$$p(t) = -|R|i^2(t)$$

predanu drugim dijelovima mreže, kao parametar figurira samo vrijednost otpora $|R|$, a kako je taj $|R|$ realiziran *nije predmet* Teorije mreža.

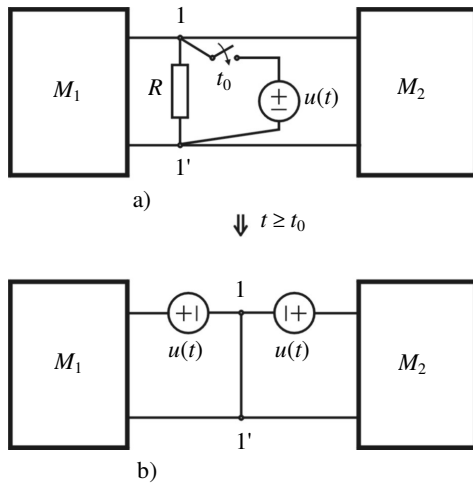
2.5 POLOŽAJ IZVORA U MREŽI

Izvori su elementi mreže s pomoću kojih se električna energija uvodi u mrežu i najčešće ih valja shvatiti kao poticaje. Odzivi ovise o strukturi mreže, tj. o broju čvorova i grana te sadržaju grana analizirane mreže kao i o obliku poticaja. S obzirom na to kako su izvori definirani, izrazi (6) i (7), nije svejedno mjesto njihovog djelovanja u mreži. Naime, budući da je *svaki naponski izvor* definiran tako da mu je zadan valni oblik napona koji ne ovisi o struji koja kroz njega protječe to se svaki naponski izvor može interpretirati kao **poopćeni kratki spoj**. Analogno tome *svaki se strujni izvor* može interpretirati kao **poopćeni prekid**.

Uvođenjem kratkih spojeva i prekida u mrežu može se ali i ne mora promijeniti polazna struktura mreže. Pokažimo to na jednostavnom primjeru, slika 2.12a, gdje se polazna mreža sastoji od dviju podmreža M_1 i M_2 i otpora R spojenog na prilazu 1. Ako se na prilaz 1 u trenutku t_0 spoji naponski izvor $u(t)$ opažamo sljedeće:

- Do trenutka $t=t_0$ napon između čvorova 1 i 1' ovisio je o svim elementima mreže M_1+M_2+R .
- Od trenutka $t=t_0$ napon između čvorova 1 i 1' je zadan, dakle ne ovisi više uopće o elementima mreže M_1+M_2+R .
- Struja kroz otpor R je poznata, jer je poznat napon na otporu $u(t)$, te ga se u nastavku analize ne treba uopće uzimati u obzir, tj. kao da je odspojen.
- Jednadžbe KZN-a podmreža M_1 i M_2 ostaju nepromijenjene ako se izvor $u(t)$ "gurne" kroz čvor 1 kako je to pokazano na slici 2.12b.
- Grana 1-1' postaje kratkospojna grana i podmreža M_1 postala je nezavisna od podmreže M_2 .

Dakle, polazna struktura mreže se promijenila. Opažamo također da se polazna struktura mreže ne bi promijenila da je naponski izvor $u(t)$ spojen u seriju s otporom R .



Sl. 2.12 a) Mreža prije uključenja sklopke; (M_1+M_2+R) .
 b) Mreža nakon uključenja sklopke
 $[M_1+u(t)], [M_2+u(t)]$.

Zaključujemo:

- a) Struktura mreže se *ne mijenja* spajanjem naponskih izvora *u seriju* s pasivnim elementima mreže, tzv. **spajanje u granu** (pliers entry)

- b) Svaki element mreže ili više njih *paralelno spojenih naponskom izvoru* mogu se u analizi zanemariti (*odspojiti*), osim ako se ne traži struja kroz te elemente mreže ili struja naponskog izvora.
 c) Svaki naponski izvor koji se nalazi u nekoj grani mreže može biti premješten u *sve grane koje su spojene na isti čvor* na koji je spojen i naponski izvor. Jednadžbe KZN-a time se nisu promijenile.

Analogno vrijedi i za strujne izvore, te možemo odmah zaključiti:

- d) Struktura mreže se *ne mijenja* spajanjem strujnih izvora *paralelno* pasivnim elementima mreže, tzv. **spajanje na čvorišta** (soldering iron entry).
 e) Svaki element mreže ili više njih spojenih *u seriju sa strujnim izvorom* mogu se u analizi zanemariti (*kratko spojiti*), osim ako se ne traži napon na tim elementima mreže ili napon strujnog izvora.
 f) Svaki strujni izvor spojen između para čvorova mreže može biti pomaknut kroz *sve parove čvorova koji se nalaze u istoj petlji* s parom čvorova na koje je spojen strujni izvor.

Napomena: Sve izloženo vrijedi kako za nezavisne tako i za zavisne izvore.