III. PREDAVANJE

Definicija kapaciteta i kapacitivnosti. Uskladištena energija kapaciteta. Uvjet pasivnosti. Određivanje uskladištene energije. Svojstva VNP kapaciteta: pamćenje, neprekidnost valnog oblika funkcije *q*(*t*) – zakon o očuvanju naboja, nedisipativnost, $I_c(0) \equiv 0$. Definicija induktiviteta. Induktivitet kao element mreže dualan kapacitetu. Dualnost elemenata mreže – općenito. Svojstva VNP induktiviteta. Nejednoznačnost *i*-φ karakteristike-disipativnost. Energetski odnosi u linearnom vremenski promjenljivom reaktivnom elementu – elektromehanička pretvorba.

3. JEDNOPRILAZNI REAKTIVNI ELEMENTI

3.1 OSNOVNI POJMOVI O KAPACITETU

- ***Kapacitet.*** Jednoprilaz kojemu se za bilo koji *poticaj*, u bilo kojem *trenutku t*, napon *u*(*t*) i naboj *q*(*t*) mogu prikazati krivuljom u ravnini *q*-*u*.

$$\mathscr{C} = \{(u,q)\ ;\ f(u,q,t) = 0\} \qquad \text{VP kapacitet}$$
$$\mathscr{C} = \{(u,q)\ ;\ f(u,q) = 0\} \qquad \text{VNP kapacitet}$$

Funkciju *f*(*u*,*q*,*t*)=0 nazivamo *karakteristikom* kapaciteta u trenutku *t*.

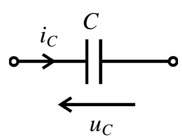
- ***Kapacitivnost.*** Kvocijent

$$C(u,q,t) = \frac{q}{u}$$

naziva se ***statička kapacitivnost*** u trenutku *t*. Za linearni vremenski promjenljivi kapacitet statička kapacitivnost je samo funkcija vremena, tj. *C*(*t*), dok je za linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet statička kapacitivnost konstanta

$$C = \frac{q}{u} \tag{1}$$

S obzirom na izuzetnu praktičnu važnost linearnog vremenski nepromjenljivog kapaciteta često se riječ "kapacitet" koristi umjesto naziva statička kapacitivnost.



Sl. 3.1 Simbol kapaciteta i pridruženi referentni smjerovi napona i struje.

3.2 ENERGIJA KAPACITETA I PASIVNOST

- ***Energija kapaciteta.*** U skladu s izrazom (1.2) energija kapaciteta primljena (predana) od drugih dijelova (drugim dijelovima) mreže dana je izrazom

$$W_C(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} u_C(x)i_C(x)dx \gtreqless 0 \quad \left.\begin{matrix}\text{primljena}\\ \text{predana}\end{matrix}\right\}\text{energija}$$

- ***Pasivnost.*** Svojstvo nekog elementa mreže da u *neto efektu* ne preda drugim dijelovima mreže više električne energije nego što je od njih prethodno primio.

U skladu s ovom definicijom kapacitet je pasivan ako vrijedi da je

$$W_C(-\infty,t) \geq 0$$

Pri tome, kao i u prvom poglavlju pretpostavljamo da je u trenutku $t = -\infty$ kapacitet stvoren, te je po definiciji

$$W_C(-\infty) = 0$$

No,

$$W_C(-\infty,t) = W_C(-\infty,t_0) + W_C(t_0,t) \geq 0 \tag{2}$$

gdje očigledno prvi član izraza mora biti *nenegativan* i naziva se ***uskladištena energija*** kapaciteta u trenutku t_0

$$W_C(-\infty,t_0) = \mathscr{E}_C(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} u_C(t)i_C(t)dt \geq 0 \tag{3}$$

Iz (2) proizlazi da je

$$\mathscr{E}_C(t_0) + W_C(t_0,t) \geq 0\ ;\ \forall t_0\ ,\ \forall t \geq t_0 \tag{4}$$

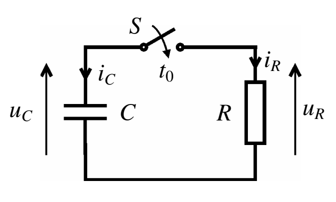
Ako je ovaj uvjet ispunjen, kapacitet je *pasivan*. U protivnom je *aktivan*.

Kako je $W_c(t_0,t) \gtreqless 0$, a $\mathscr{E}_C(t_0) \geq 0$, to se uskladištena energija u trenutku t_0 može predočiti kao *najveća količina energije* koja se od trenutka t_0 *može predati* drugim dijelovima mreže.

Pitanje: Kako odrediti uskladištenu energiju kapaciteta ?

Odrediti je li u nekom kapacitetu uskladištena električna (točnije: elektrostatička) energija i odrediti njen iznos moguće je samo *pretvorbom* te energije u neki drugi oblik.

Analogno vrijedi i za akumulatore. Koliki je ampersatni kapacitet akumulatora ne znamo dok ga ne ispraznimo, a kad ga ispraznimo znamo koliki je bio, ali sada je jednak nuli.



za $t \geq t_0$

$u_R = u_C\ ;\ i_R + i_C = 0$

Sl. 3.2 K objašnjenju pojma uskladištene energije.

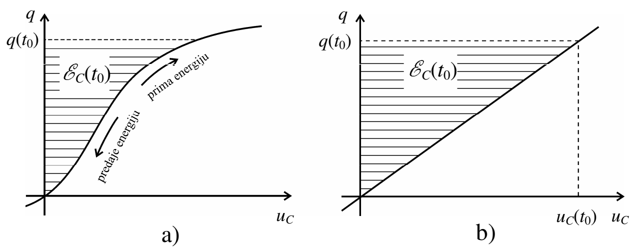
Pretpostavimo da u trenutku t_0 uklopi sklopka S. Očigledno je da će se sva energija uskladištena u kapacitetu C do trenutka t_0 pretvoriti u otporu R u toplinu. Vrijedi

$$\mathscr{E}_C(t_0) = W_R(t_0,\infty)$$

$$W_R(t_0,\infty) = \int_{t_0}^{\infty} u_R i_R dt = \int_{t_0}^{\infty} u_C \cdot (-i_C) dt = -\int_{t_0}^{\infty} u_C \frac{dq}{dt} \cdot dt =$$
$$= -\int_{q(t_0)}^{q(\infty)} u_C dq = \int_{q(\infty)}^{q(t_0)} u_C dq$$

Budući da se do $t=\infty$ sva uskladištena energija pretvorila u toplinu, to je $q(\infty)=0$, te dobivamo de je

$$\mathscr{E}_C(t_0) = \int_0^{q(t_0)} u_c dq \qquad (5)$$



a) b)

Sl. 3.3 Grafički prikaz uskladištene energije za:
a) nelinearni vremenski nepromjenljivi kapacitet;
b) linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet.

Za linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet je

$$\mathscr{E}_C(t_0) = \frac{1}{2} C u_C^2(t_0)$$

3.3 SVOJSTVA VREMENSKI NEPROMJENLJIVIH KAPACITETA

3.3.1 *Pamćenje*

Iz prethodnog poglavlja znamo da je otpor definiran relacijom između napona i struje *u istom trenutku*. Sadašnji trenutak nije koreliran s prošlim trenucima. Otpor ne pamti ono što je prošlo.

S druge strane, kapacitet povezuje vrijednosti *napona i naboja u istom trenutku*, što primjerice za linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet znači da je

$$u_C(t) = \frac{1}{C} q(t)$$

Ali,

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(x)dx \;\rightarrow\; u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx$$

što znači da sadašnja vrijednost napona (u trenutku t) ovisi o svim prošlim vrijednostima struja. To je i fizikalni smisao integrala! Dakle, kapacitet iskazuje *svojstvo pamćenja*.

U općem slučaju napon na kapacitetu ovisi o *naboju*

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(x)dx = \int_{-\infty}^{t_0} i(t)dt + \int_{t_0}^{t} i(x)dx = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(x)dx \qquad (6)$$

a koji opet ovisi o *početnom uvjetu* $q(t_0)$, koji valja znati da se ne bi trebala poznavati cijela pretpovijest od $i(t)$ u intervalu $-\infty < t \le t_0$, te o *svim vrijednostima* struje $i(t)$ u intervalu $t_0 < x \le t$.

Za linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet vrijedit će

$$u_C(t) = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(x)dx$$

3.3.2 *Neprekidnost valnog oblika funkcije q(t)*

U dva bliska trenutka t i $t+\Delta t$ vrijedit će da je

$$\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t) = \int_{-\infty}^{t+\Delta t} i(x)dx - \int_{-\infty}^{t} i(x)dx = \int_{t}^{t+\Delta t} i(x)dx$$

ako pretpostavimo da $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta q \to 0$, ali uz uvjet da je $i(t) < \infty$! Ovo znači da je

$$q(t-0) = q(t+0) \;\; ; \;\; \forall t \qquad (7)$$

što je matematički iskaz ***zakona o očuvanju naboja.***

Ako je kapacitet linearan i vremenski nepromjenljiv, izraz (7) se zbog $q = Cu_C$ svodi na

$$u_C(t-0) = u_C(t+0) \;\; ; \;\; \forall t \;\; , \;\; i_C < \infty \qquad (8)$$

što znači da *skok napona* na linearnom vremenski nepromjenljivom kapacitetu *nije moguć.*

3.3.3 *Nedisipativnost*

U periodičkom režimu rada vrijedi da je $q(t)=q(t+T)$, gdje je sa T označena perioda. Pretpostavimo li da je $u_C = f(q)$, to će uložena energija u kapacitet tijekom jedne periode biti

$$W_C(t,t+T) = \int_{t}^{t+T} u_C(x) i_C(x) dx = \int_{t}^{t+T} f(q)\frac{dq}{dx}dx =$$
$$= \int_{q(t)}^{q(t+T)} f(q)dq = 0 \qquad (9)$$

uz uvjet da je karakteristika $u_C = f(q)$ jednoznačna.

3.3.4 *Srednja vrijednost struje*

$$I_C(0) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i_C(x)dx = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{dq}{dx}dx = \frac{1}{T}\int_{q(t)}^{q(t+T)} dq$$

Odavde zbog $q(t) = q(t+T)$ proizlazi da je

$$I_C(0) = 0 \qquad (10)$$

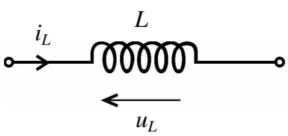
3.4 OSNOVNI POJMOVI O INDUKTIVITETU

- ***Induktivitet.*** Jednoprilaz kojemu se za bilo koji *poticaj*, u bilo kojem *trenutku t* struja $i(t)$ i tok $\varphi(t)$ mogu prikazati krivuljom u ravnini i-φ.

$\mathscr{L}\{(i,\varphi);f(i,\varphi,t)=0\}$ VP induktivitet

$\mathscr{L}\{(i,\varphi);f(i,\varphi)=0\}$ VNP induktivitet

Funkcija $f(i,\varphi,t)$ naziva se karakteristikom induktiviteta u trenutku t.



Sl. 3.4 Simbol induktiviteta i pridruženi referentni smjerovi napona i struje.

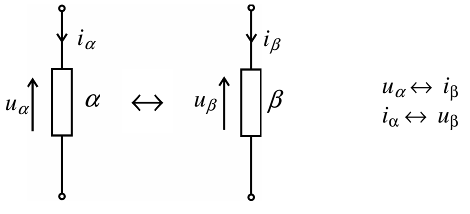
Napomena: U prvom poglavlju pri uvođenju Kirchhoffovog modela definirana je jedna od temeljnih varijabli Kirchhoffovog modela

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} u(x)dx$$

nazvana *tok* i ne smije se brkati s fizikalnom varijablom magnetskog toka. Tok je integral napona koji djeluje na priključcima modelirane naprave i ništa više ! Polje izvan naprava ne postoji (postulati teorije mreža!), unutar naprava, da !

3.4.1 *Induktivitet – element mreže dualan kapacitetu*

- ***Dualnost elemenata mreže.*** Element mreže α napona u_α i struje i_α dualan je elementu mreže β napona $u_\beta \leftrightarrow i_\alpha$ i struje $i_\beta \leftrightarrow u_\alpha$. Znak $\leftrightarrow$ valja čitati kao "zamijenjen sa".



Sl. 3.5 Dualni elementi mreže. Referentni smjerovi napona i struja ostaju očuvani.

Sve objašnjeno u odsječcima 3.1 do 3.3 vrijedi i za induktivitet s time da se zamijeni

$C \leftrightarrow L$; $u_C(t) \leftrightarrow i_L(t)$; $i_C(t) \leftrightarrow u_L(t)$; $q(t) \leftrightarrow \varphi(t)$

Proizlazi:

a) ***uskladištena energija:***

$$\mathscr{E}_L(t_0) = \int_0^{\varphi(t_0)} i_L d\varphi \qquad (11)$$

- za linearni vremenski nepromjenljivi induktivitet

$$\mathscr{E}_L(t_0) = \frac{1}{2}L i_L^2(t_0)$$

b) **neprekidnost valnog oblika funkcije $\varphi(t)$**

$$\varphi(t-0) = \varphi(t+0) \qquad (12)$$

što je matematički iskaz ***zakona o očuvanju toka:***

- za linearni vremenski nepromjenljivi induktivitet

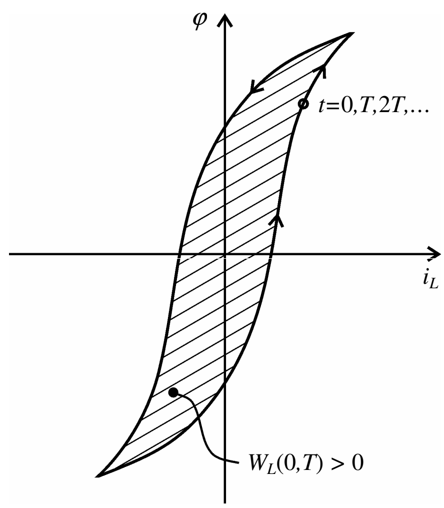
$$i_L(t-0) = i_L(t+0)$$

c) ***srednja vrijednost napona:***

$$U_L(0) = 0 \qquad (13)$$

3.4.2 *Nejednoznačnost karakteristike*

Prigušnice i transformatori, napajani iz izmjeničnog izvora, često se prikazuju kao nelinearni vremenski nepromjenljivi induktiviteti s dvoznačnom karakteristikom, slika 3.6.



Sl. 3.6 Tipična karakteristika prigušnice ili transformatora s feromagnetskom jezgrom napajanih iz izmjeničnog izvora.

U skladu s objašnjenjem na slici 3.3.a opažamo da se pri zadanom smjeru obilaska karakteristike više energije preuzima iz drugih dijelova mreže nego što se predaje. Ako induktivitet miruje ova se energija u iznosu

$$W_L(0,T) = \int_0^T u_L i_L dt = \int_0^T i_L \frac{d\varphi}{dt} dt =$$

$$= \oint i_L d\varphi = površina\ \ petlje > 0$$

može pretvoriti samo u *toplinu*.

3.5 ENERGETSKI ODNOSI U VREMENSKI PROMJENLJIVOM REAKTIVNOM ELEMENTU

Energetske odnose objasnit ćemo na najjednostavnijem primjeru linearnog vremenski promjenljivog induktiviteta. Prvo, odredimo *brzinu kojom vanjski svijet ulaže energiju* u induktivitet $L(t)$, dakle

$$p_L(t) = u_L(t) i_L(t) = \frac{d}{dt}\left[L(t) i_L(t)\right] \cdot i_L(t) =$$

$$= \frac{dL}{dt} i_L^2(t) + L(t) i_L(t) \frac{di_L}{dt}$$

S druge strane, *brzina kojom se energija skladišti* u $L(t)$ iznosi

$$\frac{d\mathscr{E}_L}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} L(t) i_L^2(t)\right] = \frac{1}{2}\frac{dL}{dt} i_L^2(t) + L(t) i_L(t) \frac{di_L}{dt}$$

Razlika između brzine kojom vanjski svijet ulaže energiju u $L(t)$ i brzine skladištenja energije iznosi

$$p_L(t) - \frac{d\mathscr{E}_L}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dL}{dt} i_L^2(t) \lesseqgtr 0$$

Ako je ova razlika pozitivna linearni vremenski promjenljivi induktivitet ponaša se kao trošilo. Na djelu je ***elektromehanička pretvorba.*** Dobiven je mehanički rad da bi se ostvarila polazna pretpostavka da je induktivitet vremenski promjenljiv. Ako je razlika negativna linearni vremenski promjenljivi induktivitet ponaša se kao izvor. Uloženi mehanički rad pretvara se u električnu energiju.

VAŽNO: Vremenski promjenljivi induktiviteti odnosno kapaciteti predstavljaju modele električkih naprava za koje *ne važi* uvjet nedisipativnosti (9). Fizikalni mehanizam s pomoću kojeg se ostvaruje vremenska promjenljivost valja shvatiti kao *izvor* (*uvor*) *djelatne snage.*