V. PREDAVANJE

Dva namota elektromagnetski blizu. Pasivnost – posljedica relativnog mirovanja namota. Ograničenja na parametre linearnog dvonamotnog transformatora. Postupak za određivanje predznaka međuinduktivnosti. Dogovor o oznaci pozitivne međuinduktivnosti. Uvjeti prijenosa energije dvonamotnim transformatorom u periodičkom režimu rada. Savršeni transformator: prijenos energije, nadomjesna shema spoja.

5. VIŠEPRILAZNI REAKTIVNI ELEMENTI

5.1 OSNOVNI POJMOVI O LINEARNOM DVONAMOTNOM TRANSFORMATORU.

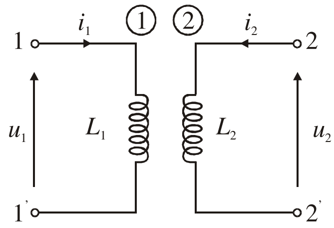
Pretpostavke:
a) dva namota elektromagnetski blizu,
b) uronjeni u linearni izotropni medij, i
c) relativno miruju.

Ako su namoti *elektromagnetski blizu* (fizička blizina je nužan ali nije dovoljan uvjet), u svakome od njih se, prema Faradayu, "osjeća" djelovanje drugog, budući da dio magnetskog toka stvoren strujom jednog namota prolazi drugim namotom.

Uronjenost u *linearni medij* uvjetuje da su konstitutivne relacije oblika

$$\varphi_1 = L_1\, i_1 + M_{12}\, i_2$$
$$\varphi_2 = M_{21}\, i_1 + L_2\, i_2$$

gdje su sa L_1 i L_2 označene induktivnosti namota 1 i namota 2, sl. 5.1. Fizički položaj jednog namota u odnosu na drugi ne utječe na induktivnosti L_1 i L_2, ali bitno utječe na međuinduktivnosti M_{12} i M_{21} koje su mjera za međudjelovanje dvaju namota. Pri tome je sa M_{12} označeno djelovanje struje namota 2, i_2, na tok u namotu 1, φ_1, a sa M_{21} djelovanje struje namota 1, i_1, na tok u namotu 2, φ_2.



Sl 5.1 Pridruženi referentni smjerovi napona i struja.

Izotropnost medija uvjetuje da je

$$M_{12} = M_{21} = M$$

te vrijedi da je

$$\varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad ; u_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \qquad (1)$$

$$\varphi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \quad ; u_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} \qquad (2)$$

Namoti *relativno miruju*, što znači da su parametri L_1, L_2 i M *vremenski nepromjenljivi.* Zbog toga vrijedi da je

$$\mathcal{E}\,(i_1, i_2) = \int_{-\infty}^{t} (u_1 i_1 + u_2 i_2)\, dt \geq 0 \qquad (3)$$

Uvrste li se (1) i (2) u (3) proizlazi da je

$$\mathcal{E}\,(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_1 i_1^{\,2} + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^{\,2} =$$
$$= \mathcal{E}\,(i_1, 0) + M i_1 i_2 + \mathcal{E}\,(0, i_2) \geq 0 \qquad (4)$$

Da je $L_1 \geq 0$ proizlazi iz činjenice da pri $i_2 = 0$, uz i_1 po volji, mora biti $\mathcal{E}(i_1,0) \geq 0$. Analogno tome vrijedi i da je $L_2 \geq 0$.

Ako izraz za uskladištenu energiju napišemo u obliku kvadratne forme

$$2\mathcal{E}(i_1, i_2) = L_1 (i_1 + \frac{M}{L_1} i_2)^2 + i_2^{\,2} (L_2 - \frac{M^2}{L_1}) \geq 0$$

opažamo da je

$$M \gtreqless 0 \quad , \quad |M| \leq \sqrt{L_1 L_2} \qquad (5)$$

Uvodi se pojam ***faktora magnetske veze***

$$0 \leq k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1 \qquad (6)$$

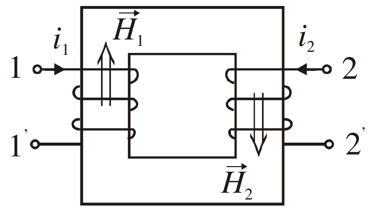
5.2 PREDZNAK MEĐUINDUKTIVNOSTI

Predznak međuinduktivnosti M ovisi o
- *odabranim* referentnim smjerovima struje, i
- *fizikalnoj situaciji*

Odaberu li se pridruženi smjerovi struja kao na slici 5.1, bit će $i_1 \cdot i_2 > 0$, što znači, u skladu sa (4), da će međuinduktivnost biti pozitivna ($M > 0$), ako je

$$\mathcal{E}\,(i_1, i_2) > \mathcal{E}\,(i_1, 0) + \mathcal{E}\,(0, i_2) \qquad (7)$$

U protivnom, M je negativan! Kako odrediti kada vrijedi uvjet (7)? Potrebno je poznavati fizikalnu situaciju, tj. s*tvarni međusobni položaj namota,* kako je pokazano na primjeru, slika 5.2.



Sl. 5.2 Primjer stvarnog međusobnog položaja namota.

Za *odabrane* referentne smjerove struja i *zadane* smjerove namatanja namota (međusobni položaj namota) bit će prema pravilu "desnog vijka" (Osnove elektrotehnike!) određen i smjer vektora jakosti magnetskog polja $\vec{H}_1$ i $\vec{H}_2$.

Ukupna uskladištena energija u krugu stvorena strujama i_1 i i_2 na diferencijalu volumena dV dana je izrazom

$$d\mathscr{E}(i_1,i_2) = \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}_1 + \vec{H}_2\right|^2 dV$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left\{\left|\vec{H}_1\right|^2 + 2\vec{H}_1\vec{H}_2 + \left|\vec{H}_2\right|^2\right\}dV$$

Kako je $\mathscr{E}(i_1,0) = \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}_1\right|^2$; $\mathscr{E}(0,i_2) = \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}_2\right|^2$

to zaključujemo da će međuinduktivnost M biti pozitivna ako je

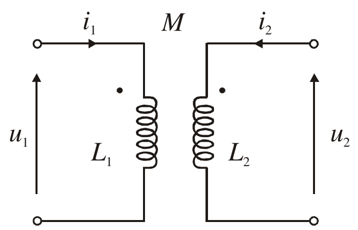
$$\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 > 0\,,$$

tj. ako je

$$0 \le \measuredangle(\vec{H}_1,\vec{H}_2) < 90^o$$

U promatranom primjeru je $\measuredangle(\vec{H}_1,\vec{H}_2) = 0$, te je $M > 0$.

Dogovor o oznaci smjera namota točkom. U teoriji mreža uobičajeno ja da se ne crtaju magnetski krugovi sa stvarnim smjerovima namota nego se pretpostavlja da je fizikalna situacija *unaprijed poznata*. Vrijedi ovaj dogovor:
Međuinduktivnost M_{jk} je pozitivna ako referentni smjerovi struja i_j i i_k izlaze (ili ulaze) iz točki naznačenih na simbolima odgovarajućih induktiviteta. U protivnom, međuinduktivnost M_{jk} je negativna!



Sl. 5.3 Primjer označavanja dvonamotnog linearnog transformatora kojem je $M > 0$.

5.3 PRIJENOS ENERGIJE U PERIODIČKOM REŽIMU RADA

Osnovna zadaća dvonamotnog transformatora (u općem slučaju magnetski vezanih induktiviteta) jest prijenos energije iz jednog kruga u drugi (ili više njih) koji su međusobno *galvanski odvojeni*.

Energija namota 1 iznosi

$$W_1(0,T) = \int_0^T u_1 i_1 dt = \oint L_1 i_1 di_1 + \oint M i_1 di_2$$

dok je energija namota 2

$$W_2(0,T) = \int_0^T u_2 i_2 dt = \oint L_2 i_2 di_2 + \oint M\, i_2 di_1$$

No,

$$\oint i_1 di_1 = \oint i_2 di_2 \equiv 0$$

dok je (Matematika!)

$$\oint i_1 di_2 + \oint i_2 di_1 = 0$$

te dobivamo da je

$$W_1(0,T) + W_2(0,T) = 0 \qquad (8)$$

Recimo da je $W_1(0, T) > 0$, što znači da namot 1 prima energiju (ponaša se kao trošilo). Zbog toga je, prema (8), $W_2(0,T) = -\left|W_1(0,T)\right| < 0$, što znači da namot 2 predaje energiju drugim dijelovima mreže (ponaša se kao izvor).

Zaključujemo: Prijenos energije jest moguć ako je

$$M\oint i_1 di_2 = -M\oint i_2 di_1 \ne 0 \qquad (9)$$

a ovaj je uvjet zadovoljen, ako
a) postoji međuinduktivnost $M \ne 0$,
b) u ravnini (i_1, i_2) postoji petlja nenulte površine, tj. da vrijedi

$$\oint i_1 di_2 = -\oint i_2 di_1 \ne 0 \qquad (10)$$

Prvi je uvjet očigledan i proizlazi iz same definicije međuinduktivnosti. Drugi uvjet implicira da je prijenos energije između dva magnetski vezana induktiviteta moguć ako *struje i_1 i i_2 nisu proporcionalne*, tj. ako vrijedi

$$i_1 \ne A i_2\,;\ \ A = konst \qquad (11)$$

U protivnom, petlja definirana izrazom (10) degenerira u pravac, tj. tada je

$$i_1 = A i_2 \qquad (12)$$

Površina petlje u ravnini (i_1, i_2) jednaka je nuli te ili se prijenos energije *ne može objasniti ovim modelom* ili uistinu *nema prijenosa energije*! Izraz (12) jedna je od konstitutivnih relacija idealnog transformatora u kojem iz relacije (4.7)

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$

odmah proizlazi da je prijenos energije moguć.

Zaključujemo da prijenos energije idealnim transformatorom ne možemo objasniti koristeći pojmove vezane uz reaktivne elemente. Zbog toga *idealni transformator* i jest *disipativni dvoprilazni element mreže* a ne reaktivni dvoprilazni element mreže.

Pitanje: Pod kojim je uvjetom u dvonamotnom transformatoru $i_1 = A\ i_2$?

Iz konstitutivnih relacija (1) i (2) proizlazi da je

$$i_1 = \frac{L_2\varphi_1 - M\varphi_2}{L_1L_2 - M^2} \quad ; \; i_2 = \frac{L_1\varphi_2 - M\varphi_1}{L_1L_2 - M^2}$$

Pretpostavimo li da je $L_1L_2 \neq M^2$, to je $i_1 = A\ i_2$ moguće ako je

$$L_2\varphi_1 - M\varphi_2 = A(L_1\varphi_2 - M\varphi_1) \Rightarrow$$

$$(L_2 + AM)\,\varphi_1 = (M + AL_1)\varphi_2$$

dakle ako je tok φ_1 proporcionalan toku φ_2, tj. ako je

$$\varphi_1 = a\ \varphi_2, \quad \text{a = konst.}$$

No u skladu s konstitutivnim relacijama (1) i (2) to će vrijediti ako je

$$\varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = a(M i_1 + L_2 i_2) = a\varphi_2$$

tj. ako je

$$L_1 = a \cdot M\,;\; M = a \cdot L_2$$

No, tada je

$$L_1L_2 = a \cdot M \cdot \frac{M}{a} = M^2$$

a to je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom!

Zaključujemo:

a) Za $L_1L_2 \neq M^2$, tj. za $k < 1$, ne može biti $i_1 = A\ i_2$, što znači da prijenos energije uvijek postoji.
b) Preostaje istražiti slučaj kad je $k = 1$!

5.4 SAVRŠENI TRANSFORMATOR (*k*=1)

(Dvonamotni) savršeni transformator jest dvonamotni transformator faktora magnetske veze $k = 1$, tj. vrijedi da je

$$M = \sqrt{L_1L_2}$$

Konstitutivne relacije (1) i (2) poprimaju oblik

$$\varphi_1 = L_1 i_1 + \sqrt{L_1L_2}\, i_2 = \sqrt{L_1}\,(\sqrt{L_1}\, i_1 + \sqrt{L_2}\, i_2) \qquad (13a)$$

$$\varphi_2 = \sqrt{L_1L_2}\, i_1 + L_2 i_2 = \sqrt{L_2}\,(\sqrt{L_1}\, i_1 + \sqrt{L_2}\, i_2) \qquad (13b)$$

odakle proizlazi da je

$$\varphi_1 = n\varphi_2\,,\ \text{tj.}$$

$$u_1 = n\,u_2 \qquad (14a)$$

gdje je $n = \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}$. Dobivena naponska jednadžba jednaka je naponskoj jednadžbi idealnog transformatora.

Iz izraza (13a) dobivamo da je

$$\frac{\varphi_1}{L_1} = i_1 + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, i_2 = i_1 + \frac{1}{n} i_2$$

Označimo li

$$i_\mu = \frac{\varphi_1}{L_1}$$

kao ***struju magnetiziranja*** dobivamo strujnu jednadžbu savršenog transformatora

$$i_1 + \frac{1}{n} i_2 = i_\mu \qquad (14b)$$

Opažamo da je $i_1 \neq A\ i_2$ što znači da se prijenos energije i u savršenom transformatoru može opisati predloženim modelom.

Nadomjesna shema spoja savršenog transformatora

Strujna jednadžba (14b) napiše se malo drukčije

$$i_1 - i_1^{'} + i_1^{'} + \frac{1}{n} i_2 = i_\mu$$

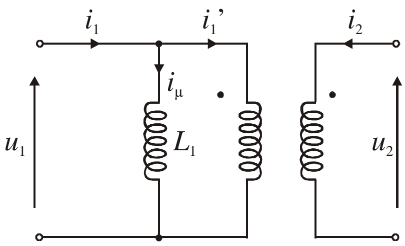
No, prema definiciji idealnog transformatora je

$$i_1^{'} + \frac{1}{n} i_2 = 0\,,$$

odakle proizlazi da je

$$i_1 = i_1^{'} + i_\mu$$

a odgovarajuća nadomjesna shema spoja prikazana je na slici 5.4.



$$L_1 = \frac{\varphi_1}{i_\mu};\; u_1 = L_1\frac{di_\mu}{dt}$$

Sl. 5.4 Savršeni transformator kao lančani spoj induktiviteta magnetiziranja L_1 i idealnog transformatora.