VI. PREDAVANJE

Pojam komutacije. Zakon o očuvanju elektromagnetske energije kao zakon komutacije u stvarnim mrežama. Zakoni komutacije u dobro definiranim mrežama: kapacitet – zakon o očuvanju naboja, induktivitet – zakon o očuvanju toka. Poseban slučaj savršenog transformatora. Pojam loše definirane mreže. Kapacitivna petlja – zakon o očuvanju naboja u čvoru koji je u sastavu kapacitivne petlje. Induktivni čvor – zakon o očuvanju toka petlje u sastavu koje je induktivni čvor. Primjer disipativnosti loše definiranih mreža.

II. PRIJELAZNO STANJE

6. ZAKONI KOMUTACIJE

6.1 OSNOVNI POJMOVI ANALIZE MREŽA U VREMENSKOM PODRUČJU

- ***Ustaljeno* (*stabilno*) *stanje*.** Svako stanje mreže karakterizirano time da varijable mreže (naponi i struje grana mreže) ostaju konačne za $t \to \infty$, i
  a) *ne ovise o vremenu*; $f(t)$=konst., ili su
  b) *periodičke funkcije vremena*; $f(t+T) = f(t)$, gdje je T perioda, ili su
  c) *kvaziperiodičke funkcije vremena*; $\left| f\left[t+T(\varepsilon)\right] - f(t)\right| < \varepsilon$, gdje je ε po volji malen pozitivni broj, ili iskazuju
  d) *kaotično ponašanje*.

- ***Prijelazno stanje*.** Svako stanje mreže koje *nije ustaljeno*.
- ***Nestabilno stanje*.** Prijelazno stanje koje ne dovodi mrežu u ustaljeno stanje, tj. barem jedna od varijabli mreže za $t \to \infty$ poprima beskonačnu vrijednost.
- ***Komutacija*.** Svaka "brza" promjena u mreži, tj. promjena u mreži trajanje koje je neusporedivo kraće od ostalih vremenskih intervala važnih u analizi mreže. Jednostavnosti radi komutaciju ćemo u nastavku smatrati *trenutnom*. Točnije rečeno smatrat ćemo da se komutacija dogodila u beskonačno kratkom vremenskom intervalu, recimo $\left[t_0 - 0, t_0 + 0\right]$, pri čemu je
  a) t_0 - 0, trenutak *neposredno prije* komutacije
  b) t_0, trenutak kada se dogodila komutacija (služi samo za *opis* onoga što je uzrokovalo komutaciju), i
  c) t_0 + 0, trenutak *neposredno nakon* komutacije

- *Vremenski slijed događaja.*

Početno ustaljeno stanje → Komutacija →

→ Prijelazno stanje < Novo ustaljeno stanje / Nestabilno stanje

6.2 ZAKON KOMUTACIJE U STVARNIM MREŽAMA

Ukupna energija uskladištena u mreži jednaka je

$$\mathscr{E}_\Sigma(t) = \sum_{k\in C} \mathscr{E}_{Ck}(t) + \sum_{k\in L} \mathscr{E}_{Lk}(t)$$

gdje je elektrostatička energija uskladištena u k-tom kapacitetu dana izrazom

$$\mathscr{E}_{Ck}(t) = \int_0^{q_k(t)} u_{Ck}\,dq_k$$

a magnetska energija uskladištena u k-tom induktivitetu izrazom

$$\mathscr{E}_{Lk}(t) = \int_0^{\varphi_k(t)} i_{Lk}\,d\varphi_k$$

Pokažimo da se u trenutku komutacije ne mijenja uskladištena elektrostatička energija u k-tom kapacitetu. Vrijedi:

$$\mathscr{E}_{Ck}(t+\Delta t) - \mathscr{E}_{Ck}(t) = \int_0^{q_k(t+\Delta t)} u_{Ck}\,dq_k - \int_0^{q_k(t)} u_{Ck}\,dq_k = \int_{q_k(t)}^{q_k(t+\Delta t)} u_{Ck}\,dq_k$$

No, iz *zakona o očuvanju naboja* (3.7) proizlazi da za

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow q(t+\Delta t) \to q(t),$$

što znači i da će vrijediti

$$\mathscr{E}_{Ck}(t+\Delta t) \to \mathscr{E}_{Ck}(t) \quad \text{za } \Delta t \to 0$$

uz uvjet da je $u_{Ck}(t) < \infty$!

Proizlazi

$$\mathscr{E}_{Ck}(t-0) = \mathscr{E}_{Ck}(t+0), \ \forall t \qquad (1)$$

Na analogan način dobili bismo na temelju *zakona o očuvanju toka* (3.12) da za magnetsku energiju uskladištenu u k-tom induktivitetu vrijedi

$$\mathscr{E}_{Lk}(t-0) = \mathscr{E}_{Lk}(t+0), \ \forall t \qquad (2)$$

Ono što vrijedi za svaku komponentu posebno vrijedit će i za sve komponente zajedno, dakle

$$\mathscr{E}_\Sigma(t-0) = \mathscr{E}_\Sigma(t+0), \ \forall t \qquad (3)$$

U Teoriji mreža uobičajeno je pretpostaviti da se *komutacija dogodila u trenutku* t=0. U skladu sa (3) dobivamo da je

$$\mathscr{E}_\Sigma(-0) = \mathscr{E}_\Sigma(+0) \qquad (4)$$

Ovo je ***zakon komutacije u stvarnim mrežama***. Vrijedi uvijek budući da je ograničenje na konačne vrijednosti napona i struja u stvarnim mrežama uvijek zadovoljeno.

Zaključujemo: Neposredno nakon komutacije u mreži ostaje očuvan iznos ukupne elektromagnetske energije. Budući da se komutacijom *mijenja* mreža, ili neki parametri mreže, tako da je eventualno postignuto ustaljeno stanje različito od polaznog, to postaje očigledno da će prijelaz iz polaznog ustaljenog stanja u novo *trajati određeno vrijeme*.

Na nivou modela zakon komutacije (4) ne mora vrijediti. Model je uvijek neko pojednostavljenje stvarne mreže, ali upravo zbog toga on može imati neka svojstva koja nema stvarna mreža ili nas neka svojstva uopće ne interesiraju.

Zbog toga ćemo u nastavku analize razlikovati na nivou modela dvije vrste mreža:

a) ***dobro definirane mreže*** – mreže u kojima *vrijede* Kirchhoffovi zakoni, i
b) ***loše definirane mreže*** – mreže u kojima *ne vrijede* Kirchhoffovi zakoni.

6.3 ZAKONI KOMUTACIJE U DOBRO DEFINIRANIM MREŽAMA

U nekoj mreži vrijede Kirchhoffovi zakoni ako za svaki trenutak t i za svaki element mreže α vrijedi da je

$$u_\alpha(t) < \infty \quad \text{i/ili} \quad i_\alpha(t) < \infty$$

S obzirom na to da je ista pretpostavka uzeta i pri izvođenju zakona komutacije u stvarnoj mreži proizlazi da i u dobro definiranim mrežama vrijedi da je

$$\mathscr{E}_\Sigma(-0) = \mathscr{E}_\Sigma(+0), \quad \forall t \tag{5}$$

Budući da se pri analizi mreža u vremenskom području koriste temeljne varijable Kirchhoffovog modela, to je zgodnije zakone komutacije za pojedini element mreže izraziti s pomoću tih varijabli a ne s pomoću izraza za uskladištenu energiju.

6.3.1 Zakoni komutacije za kapacitet

Drugo ime za zakon o očuvanju naboja je zakon komutacije za kapacitet. Za k-ti kapacitet vrijedi

$$q_k(-0) = q_k(+0) \tag{6}$$

Ako je kapacitet C_k linearan i vremenski nepromjenljiv, vrijedit će da je

$$u_{Ck}(-0) = u_{Ck}(+0) \tag{7}$$

Napomena: Zakon komutacije za linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet ne može se odrediti iz izraza (1). Naime, iz

$$\frac{1}{2} C_k\, u_{Ck}^2(-0) = \frac{1}{2} C_k\, u_{Ck}^2(+0)$$

ne proizlazi jednoznačno (7) !

6.3.2 Zakoni komutacije za induktivitet

Analogno prethodnom odsječku zaključujemo da je zakon o očuvanju toka ujedno i zakon komutacije za induktivitet

$$\varphi_k(-0) = \varphi_k(+0) \tag{8}$$

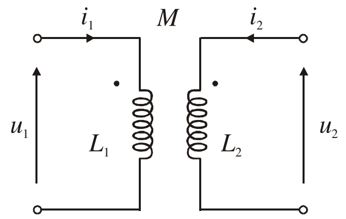
Ako je induktivitet L_k linearan i vremenski nepromjenljiv, vrijedit će da je

$$i_{Lk}(-0) = i_{Lk}(+0) \tag{9}$$

6.3.3 Zakoni komutacije za dvonamotni transformator

Napon i struja na prilazima linearnog dvonamotnog transformatora dani su izrazima

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \tag{10}$$



Sl. 6.1 Shema spoja linearnog dvonamotnog transformatora.

Integriraju li se izrazi (10) unutar vremenskog intervala komutacije [–0, +0] dobivamo da je

$$\begin{aligned} L_1 \Delta i_1 + M \Delta i_2 &= 0 \\ M \Delta i_1 + L_2 \Delta i_2 &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

gdje je $\Delta i_1 = i_1(+0) - i_1(-0)$; $\Delta i_2 = i_2(+0) - i_2(-0)$. Vrijednosti integrala

$$\int_{-0}^{+0} u_1 dt, \qquad \int_{-0}^{+0} u_2 dt$$

jednake su nuli budući da su prema pretpostavci o dobro definiranoj mreži i $u_1(t) < \infty$ i $u_2(t) < \infty$.

Trivijalno rješenje sustava jednadžbi (11) je

$$\Delta i_1 = \Delta i_2 = 0$$

tj.

$$i_1(-0) = i_1(+0) \ ; \quad i_2(-0) = i_2(+0) \qquad (12)$$

i vrijedi uz uvjet da je $L_1L_2 - M^2 \neq 0$, dakle za $k < 1$.

Netrivijalno rješenje sustava jednadžbi (11) vrijedi za savršeni transformator (k=1) i dobiva se tako da se uvjet k=1 postavi u jednu od jednadžbi (11). Proizlazi

$$i_1(-0) + \frac{1}{n} i_2(-0) = i_1(+0) + \frac{1}{n} i_2(+0) \qquad (13)$$

gdje je $n = \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}$.

Ako je dvonamotni transformator nelinearan vrijedit će za $k < 1$

$$\varphi_1(-0) = \varphi_1(+0); \ \varphi_2(-0) = \varphi_2(+0)$$

Kod savršenog nelinearnog transformatora vrijedit će kao i kod linearnog transformatora, prema (5.14a) da je

$$u_1 = n u_2 \ ; \quad \varphi_1 = n \varphi_2$$

gdje je n – realni broj koji se naziva *prijenosni omjer*. I u ovome slučaju vrijedi da je

$$i_1 + \frac{1}{n} i_2 = i_\mu = f(\varphi_1)$$

samo što je sada struja magnetiziranja nelinearna funkcija magnetskog toka φ_1, tj. $f(\varphi_1)$. Pretpostavi li se da je funkcija $f(\varphi_1)$ neprekinuta u trenutku komutacije, to se kao zakon komutacije nelinearnog savršenog transformatora dobiva formalno isti izraz kao i za linearni savršeni transformator, dakle izraz (13).

6.4 ZAKONI KOMUTACIJE U LOŠE DEFINIRANIM MREŽAMA

Mreža je loše definirana ako u njoj *ne vrijede Kirchhoffovi zakoni*, tj. ako je u barem jednom trenutku t_0 na jednom elementu mreže α

$$u_\alpha(t_0) = \infty \quad ili \quad i_\alpha(t_0) = \infty \, .$$

Naglasimo ponovno da ovaj uvjet nije moguć u stvarnoj mreži nego samo na nivou modela.

Loše definirana mreža može nastati ako se komutacijom u mreži stvori ***kapacitivna petlja*** ili ***induktivni čvor***.

6.4.1. Zakon komutacije za kapacitivnu petlju

Pod ***kapacitivnom petljom*** smatramo svaku petlju koja nastaje komutacijom a tvore ju samo *kapaciteti i naponski izvori*.

Pretpostavimo da je komutacija nastupila u trenutku t=0. S obzirom na to da su naponi na kapacitetima neposredno prije komutacije nezavisni (nezavisnost početnih uvjeta!), moguća su dva slučaja :

a)

$$\sum_{k \in C} u_{kj}(-0) + \sum_{k \in E} u_{kj}(-0) = 0 \qquad (14a)$$

b)

$$\sum_{k \in C} u_{kj}(-0) + \sum_{k \in E} u_{kj}(-0) \neq 0 \qquad (14b)$$

gdje je sa C označen skup svih kapaciteta, a sa E skup svih naponskih izvora koji *će* ***nakon komutacije*** zajedno tvoriti j-tu kapacitivnu petlju.

Neposredno nakon komutacije mora vrijediti da je

$$\sum_{k \in C} u_{kj}(+0) + \sum_{k \in E} u_{kj}(+0) = 0$$

Pretpostavimo li da je za svaki naponski izvor zadovoljeno da je $u_k(-0) = u_k(+0)$ tj. da nema skoka napona u trenutku komutacije, opažamo da je u intervalu komutacije [–0, +0] u prvom slučaju, (14a), očuvan Kirchhoffov zakon napona, a da je u drugom slučaju, (14b), prekršen. Dakle, u prvom slučaju promatrana mreža je i u intervalu komutacije ostala dobro definirana, dok je u drugom slučaju promatrana mreža loše definirana, budući da je zahtijevana skokovita promjena napona na kapacitetima u intervalu komutacije moguća samo pojavom impulsa struje beskonačnog iznosa.

U nastavku analize zanemarit ćemo prvi slučaj, tj. smatrat ćemo da stvaranjem kapacitivne petlje promatrana mreža uvijek postaje loše definirana mreža.

Pitanje*:* Što ostaje očuvano u kapacitivnoj petlji u trenutku komutacije?

Napišimo Kirchhoffov zakon struje za n-ti čvor iz sastava j-te kapacitivne petlje. Vrijedi da je u bilo kojem trenutku

$$\sum_{k \in I} i_{kn} + \sum_{k \in R} i_{kn} + \sum_{k \in L} i_{kn} + \sum_{k \in C} \frac{dq_{kn}}{dt} = 0 \qquad (15)$$

gdje su sa I, R, L i C označeni skupovi strujnih izvora, otpora, induktiviteta i kapaciteta spojenih na n-ti čvor. Naponski izvori nisu spojeni na n-ti čvor, a ako i jesu sa po jednim priključkom, onda su drugi priključci tih izvora spojeni tako da ne tvore paralelni spoj ni s jednim od kapaciteta priključenih na n-ti čvor.

Integriramo li jednadžbu (15) u intervalu komutacije, to će zbog konačnih vrijednosti struja strujnih izvora te struja induktiviteta i otpora vrijediti da je

$$\sum_{k\in I}\int_{-0}^{+0} i_{kn}dt = 0 \;;\qquad \sum_{k\in R}\int_{-0}^{+0} i_{kn}dt = 0 \;;\qquad \sum_{k\in L}\int_{-0}^{+0} i_{kn}dt = 0$$

odnosno da je

$$\sum_{k\in C}\int_{-0}^{+0} \frac{dq_{kn}}{dt}dt = 0$$

odakle proizlazi da mora biti

$$\sum_{k\in C} q_{kn}(-0) = \sum_{k\in C} q_{kn}(+0) \qquad (16)$$

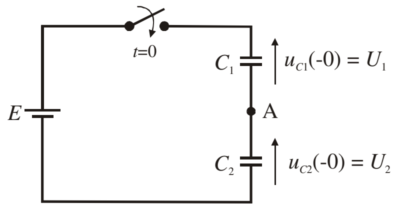
Dakle, za vrijeme komutacije očuvan je ***ukupni naboj u n-tom čvoru*** koji je u sastavu kapacitivne petlje. Izraz (16) predstavlja ***zakon komutacije za kapacitivnu petlju***.

VAŽNO: Iz izvoda zakona komutacije (16) proizlazi da zbroj naboja

$$\sum_{k\in C} q_{kn}$$

valja pisati uzimajući u obzir referentne smjerove napona na kapacitetima, ali u skladu s Kirchhoffovim zakonom struje.

Primjer: Odredite napone $u_{C1}(+0)$ i $u_{C2}(+0)$ u mreži sheme spoja prema slici 6.2 ako je $u_{C1}(-0) + u_{C2}(-0) \neq E$!



Sl. 6.2 Primjer kapacitivne petlje.

Rješenje:
Ukupni naboj u čvoru *A* mora biti očuvan. Dakle

$$C_1 u_{C1}(-0) - C_2 u_{C2}(-0) = C_1 u_{C1}(+0) - C_2 u_{C2}(+0)$$
$$E = u_{C1}(+0) + u_{C2}(+0)$$

odakle proizlazi da je

$$u_{C1}(+0) = \frac{C_1 U_1 + C_2(E - U_2)}{C_1 + C_2}$$
$$u_{C2}(+0) = \frac{C_1(E - U_1) + C_2 U_2}{C_1 + C_2}$$

6.4.2 Zakon komutacije za induktivni čvor

Pod ***induktivnim čvorom*** smatramo svaki čvor na koji će nakon komutacije ostati spojeni samo *induktiviteti* i *strujni izvori.*

Pretpostavimo da je komutacija nastupila u trenutku t=0. S obzirom na to da su struje induktiviteta neposredno prije komutacije nezavisne (nezavisnost početnih uvjeta!), moguća su dva slučaja:

a)

$$\sum_{k\in L} i_{kj}(-0) + \sum_{k\in I} i_{kj}(-0) = 0 \qquad (17a)$$

b)

$$\sum_{k\in L} i_{kj}(-0) + \sum_{k\in I} i_{kj}(-0) \neq 0 \qquad (17b)$$

gdje je sa L označen skup svih induktiviteta, a sa I skup svih strujnih izvora koji će ***nakon komutacije*** ostati spojeni na j-ti induktivni čvor.

Neposredno nakon komutacije mora vrijediti da je

$$\sum_{k\in L} i_{kj}(+0) + \sum_{k\in I} i_{kj}(+0) = 0$$

Pretpostavimo li da je za svaki strujni izvor zadovoljeno da je $i_k(-0) = i_k(+0)$, tj. da nema skoka struje strujnog izvora u trenutku komutacije, opažamo da je u intervalu komutacije [–0, +0] u prvom slučaju, (17a), očuvan Kirchhoffov zakon struje, a da je drugom slučaju, (17b), prekršen. Dakle u prvom slučaju promatrana mreža je i u intervalu komutacije ostala dobro definirana, dok je u drugom slučaju promatrana mreža loše definirana, budući da je zahtijevana skokovita promjena struja induktiviteta u intervalu komutacije moguća samo pojavom impulsa napona beskonačnog iznosa.

U nastavku analize smatrat ćemo, analogno prethodnom odsječku, da stvaranjem induktivnog čvora promatrana mreža uvijek postaje loše definirana mreža.

Sličnim postupkom kao u prethodnom odsječku ili koristeći načelo dualnosti (poglavlje 3.), lako dobivamo ***zakon komutacije za induktivni čvor:***

$$\sum_{k\in L} \varphi_{kn}(-0) = \sum_{k\in L} \varphi_{kn}(+0) \qquad (18)$$

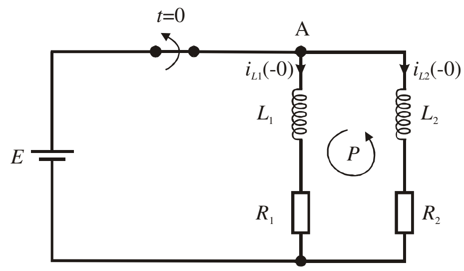
Dakle, za vrijeme komutacije ***očuvan je ukupni tok u n-toj petlji*** u sastavu koje je induktivni čvor.

VAŽNO: Zbroj tokova

$$\sum_{k\in L} \varphi_{kn}$$

valja pisati uzimajući u obzir referentne smjerove struja induktiviteta ali u skladu s referentnim smjerom napona petlje, dakle poštujući Kirchhoffov zakon napona.

Primjer: Odredite struju kroz induktivitet L_1 neposredno nakon otvaranja sklopke u mreži sheme spoja prema slici 6.3.



Sl. 6.3 Primjer induktivnog čvora (čvor A).

Rješenje: Ukupni tok u petlji P mora biti očuvan. Dakle

$$L_1 i_{L1}(-0) - L_2 i_{L2}(0) = (L_1 + L_2) i_{L1}(+0)$$

Kako je $\quad i_{L1}(-0) = \dfrac{E}{R_1} \quad ; \quad i_{L2}(-0) = \dfrac{E}{R_2}$

proizlazi da je

$$i_{L1}(+0) = \frac{E}{L_1 + L_2}\left(\frac{L_1}{R_1} - \frac{L_2}{R_2}\right)$$

6.4.3 Disipativnost loše definiranih mreža

Za sve loše definirane mreže vrijedi da je

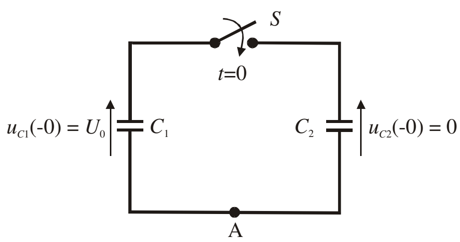
$$\mathscr{E}_{\Sigma}(+0) < \mathscr{E}_{\Sigma}(-0)$$

tj. uskladištena energija neposredno nakon komutacije manja je od uskladištene energije neposredno prije komutacije. Razlika energije se disipira i to uglavnom na onom elementu mreže koji je uzrokovao komutaciju.

***Primjer**:* Odredite uskladištenu energiju u mreži sheme spoja prema slici 6.4 neposredno nakon komutacije.

Rješenje: Iz zakona o očuvanju naboja u čvoru A proizlazi da je

$$C_1 u_{C1}(-0) = (C_1 + C_2)\, u_C(+0)$$
$$u_C(+0) = u_{C1}(+0) = u_{C2}(+0)$$



Sl. 6.4 Energija se disipira na sklopci *S*.

te se dobiva da je

$$\mathscr{E}(+0) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\, u_C^2(+0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{1}{2} C_1 U_0^2$$

Budući da je uskladištena energija u mreži neposredno prije komutacije bila

$$\mathscr{E}(-0) = \frac{1}{2} C_1 U_0^2$$

to proizlazi da je

$$\mathscr{E}(+0) < \mathscr{E}(-0)$$

Napomene:

a) Kapacitivne petlje i induktivni čvorovi lako se izbjegnu u analizi neke mreže ako se pri modeliranju komponenata te mreže uzmu u obzir i parazitska svojstva komponenata kao što su primjerice : otpornost i induktivnost kondenzatora, otpornost i kapacitivnost zavojnica i transformatora, otpornost spojnih vodova i priključnica, konačna sklopna vremena sklopki i dr. Loše definirane mreže postaju time dobro definirane, međutim analiza takvih mreža postaje bitno složenija. Trud uložen u analizu takvih mreža najčešće je neopravdan, pogotovo u početnoj fazi analize neke mreže.

b) **Iskustveno pravilo:** Ako na razini najjednostavnijih modela komponenata zadana mreža u nekom trenutku ili vremenskom intervalu predstavlja loše definiranu mrežu, fizički model zadane mreže vrlo vjerojatno neće uspješno raditi.