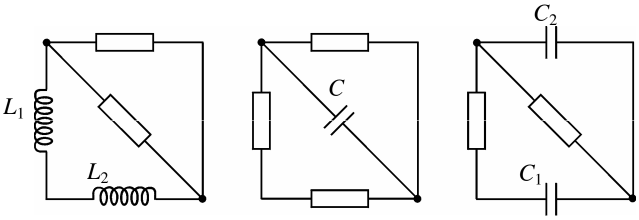
VII. PREDAVANJE

Definicija mreže prvog reda. Opće rješenje linearne vremenski nepromjenljive mreže prvog reda dobiveno na temelju Thévenin-Nortonovog teorema. Varijable stanja u_C(t), i_L(t). Pojam vremenske konstante. Potpuni odziv. Rastav na slobodni i prisilni odziv. Rastav na prijelazno stanje i ustaljeno stanje. Sva rješenja istosmjerne kapacitivne mreže: primjeri s pozitivnom i negativnom vremenskom konstantom. Primjer za skok struje u nelinearnoj mreži: reprezentativna točka, dinamički put.

7. MREŽE PRVOG REDA

Svaka mreža koja se sastoji od ***jednog nadomjesnog kapaciteta*** ili ***jednog nadomjesnog induktiviteta*** i mreže otpora naziva se ***mrežom prvog reda***. Ograničenje na nadomjesne elemente mreže je nužno budući da u mreži može postojati više paralelno ili serijski spojenih istovrsnih reaktivnih elemenata koji djeluju kao jedan reaktivni element. Mreža prvog reda se, dakle, može prikazati kao



a) b)

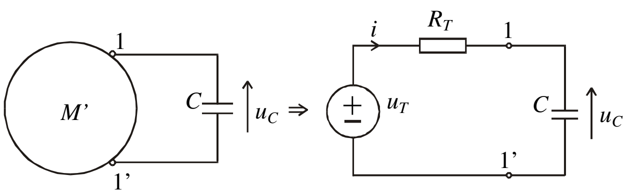
Sl. 7.1 a) Dva primjera mreže prvog reda.
b) Primjer mreže koja nije prvog reda.

jednoprilaz, koji se sastoji od jednog ili više otpora i nezavisnih izvora, na prilaz kojega je spojen *jedan reaktivni element*.

7.1 OPĆE RJEŠENJE LINEARNE VREMENSKI NEPROMJENLJIVE MREŽE PRVOG REDA

7.1.1 Kapacitivna mreža

Budući da je mreža linearna vremenski nepromjenljiva, taj se dio mreže M označen sa M', a koji se



a) b)

Sl. 7.2 a) Opća kapacitivna mreža $M = M' + C$.
b) Nadomjesna mreža prema Théveninu.

sastoji od više otpora i više naponskih i strujnih izvora, sl. 7.2.a, može zamijeniti prema Théveninu mrežom sheme spoja prema slici 7.2.b, tj. serijskim spojem Théveninovog naponskog izvora u_T i Théveninovog otpora R_T. Vrijedi :

$$R_T i + u_C = u_T$$

Budući da je $i = C\, du_C/dt$ te ako se uvede veličina

$$\tau = R_T C \tag{1}$$

koja se naziva ***vremenskom konstantom*** dobivamo diferencijalnu jednadžbu

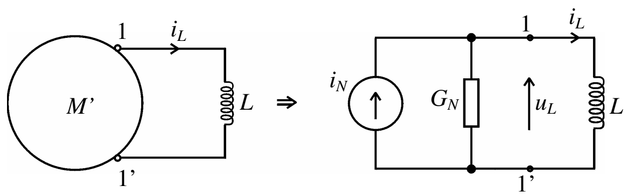
$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = u_T \tag{2}$$

rješenje koje je

$$u_C(t) = u_C(+0) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t-x}{\tau}} u_T(x)dx \;\; ; \; t \geq +0 \tag{3}$$

7.1.2 Induktivna mreža

Na analogni se način dio opće induktivne mreže M, označen sa M', slika 7.3.a, može prema Nortonu zamijeniti



a) b)

Sl. 7.3 a) Opća induktivna mreža $M = M' + L$.
b) Nadomjesna mreža prema Nortonu.

paralelnim spojem Nortonovog strujnog izvora i_N i Nortonove vodljivosti G_N, slika 7.3.b. Vrijedi :

$$G_N u_L + i_L = i_N$$

Budući da je $u_L = L\, di_L/dt$ te ako se uvede ***vremenska konstanta***

$$\tau = G_N L \tag{4}$$

dobivamo diferencijalnu jednažbu

$$\tau \frac{di_L}{dt} + i_L = i_N \tag{5}$$

rješenje koje je

$$i_L(t) = i_L(+0) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t-x}{\tau}} i_N(x)dx \;\; ; \; t \geq +0 \tag{6}$$

Zaključujemo :

a) Izbor varijabli u_C odnosno i_L za opis mreža prvog reda je logičan. Dok god je mreža dobro definirana vrijedit će zakoni komutacije (poglavlje 6.3.) u najjednostavnijem obliku

$$u_C(+0) = u_C(-0) \;\; ; \;\; i_L(+0) = i_L(-0)$$

Ove se varijable zovu ***varijable stanja*** a pripadne jednadžbe (2) i (5) ***jednadžbe stanja***. O tome više kasnije !

b) Vremenske konstante (1) i (4) su *mjere za gubitak pamćenja* u odgovarajućim mrežama.
Ograničimo li se na slučaj $\tau > 0$ proizlazi za
- prvi član u izrazima (3) i (6) da što je τ manji to se brže gubi informacija o početnom uvjetu $u_C(-0)$ odnosno $i_L(-0)$. Također za
- drugi član u izrazima (3) i (6) opažamo da za sve trenutke x takve da je $\tau << t-x$, valni oblici $u_T(x)$ odnosno $i_N(x)$ praktički nemaju utjecaja na vrijednost integrala. Poticaji koji su davno nastupili (prije više τ-ova) ne utječu na sadašnje stanje !

c) Ako se nakon određivanja napona na kapacitetu u_C odnosno struje kroz induktivitet i_L ove varijable *zamijene* naponskim odnosno strujnim uvorom, opća kapacitivna odnosno induktivna mreža rješavaju se kao *otporne mreže* !

7.2. RASTAV POTPUNOG ODZIVA

Analizirajmo opće rješenje kapacitivne odnosno induktivne mreže. Opažamo da je poticaj *dvovrstan* i tvore ga

a) *uskladištena energija* u kapacitetu odnosno induktivitetu *u trenutku* $t=+0$, i
b) *djelovanje naponskih odnosno strujnih izvora od trenutka* $t=+0$.

Napon na kapacitetu $u_C(t)$ odnosno struja kroz induktivitet $i_L(t)$ shvaćaju se kao odzivi mreže na poticaj. U izrazima (3) odnosno (6) prva komponenta odziva jest odziv zbog uskladištene energije i taj se odziv naziva ***slobodni odziv***. Druga komponenta odziva jest odziv zbog djelovanja izvora i naziva se ***prisilni odziv***. Zbrajanjem ovih odziva dobiva se ***potpuni odziv***. Dakle,

Potpuni odziv = Slobodni odziv + Prisilni odziv (7)

Zaključujemo :

a) Pri određivanju slobodnog odziva treba sve naponske izvore kratko spojiti i sve strujne izvore prekinuti. (odsječak 2.5. !) → $\boldsymbol{u_T=0}$ odnosno $\boldsymbol{i_N=0}$.
b) Pri određivanju prisilnog odziva treba sve početne uvjete izjednačiti s nulom, tj. stvoriti "*mrtvu*" mrežu → $\boldsymbol{u_C(+0)=0}$ odnosno $\boldsymbol{i_L(+0)=0}$.
c) Slobodni odziv je *linearna funkcija* početnih uvjeta, tj. $u_C(+0)$ ili $i_L(+0)$.
d) Prisilni odziv je *linearna funkcija* vanjskog poticaja, tj. $u_T(t)$ ili $i_N(t)$.

Napomena : Ovaj postupak određivanja komponenata potpunog odziva *vrijedi samo* ako je promatrana mreža *linearna*, što je i bila polazna pretpostavka!

Druga mogućnost rastava potpunog odziva jest ako postoji ustaljeno stanje (poglavlje 6.1.). Tada se potpuni odziv može rastaviti i ovako

Potpuni odziv = Prijelazno stanje + Ustaljeno stanje (8)

U skladu s poglavljem 6.1. ***ustaljeno stanje*** je dano izrazima

$$\lim_{t\to\infty} u_C(t) = u_C(\infty) \;\; ; \;\; \lim_{t\to\infty} i_L(t) = i_L(\infty)$$

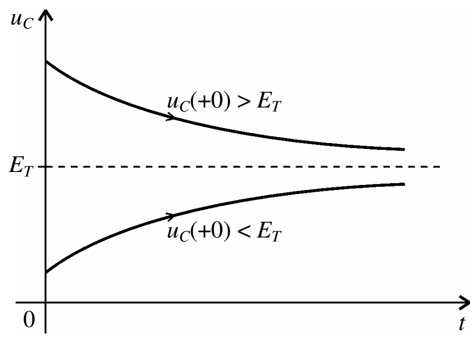
dok je ***prijelazno stanje*** dano izrazima

$$u_C(t) - u_C(\infty) \;\; ; \;\; i_L(t) - i_L(\infty)$$

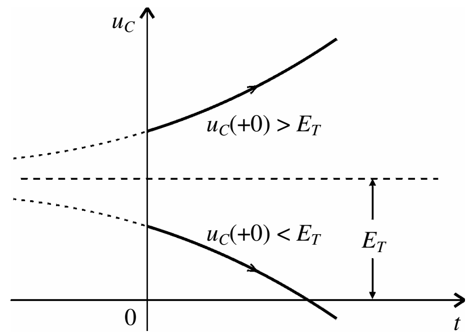
Napomena : Budući da određivanje komponenata potpunog odziva prema (8) zahtijeva poznavanje $u_C(t)$ odnosno $i_L(t)$, to je rastav potpunog odziva na prijelazno stanje i ustaljeno stanje *posve općenit*, dakle vrijedi za bilo koju mrežu koja posjeduje ustaljeno stanje. Takve se mreže nazivaju i *stabilne mreže*.

7.3. ISTOSMJERNE MREŽE

Sva razmatranja provest će se samo za opću istosmjernu kapacitivnu mrežu, slika 7.2.b.



Sl. 7.4.a Napon na kapacitetu nakon uključenja istosmjernog napona E_T, za $\tau > 0$, mreža je stabilna.



Sl. 7.4.b Napon na kapacitetu nakon uključenja istosmjernog napona E_T, za $\tau < 0$, mreža je nestabilna.

Označimo li da je $u_T(t)=E_T$ to je prema (3) opće rješenje dano izrazom

$$u_C(t) = u_C(+0)e^{-\frac{t}{\tau}} + E_T(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \;\; ; \;\; t \geq +0 \qquad (9)$$

Prva komponenta odziva je *slobodni odziv*, dok je druga komponenta *prisilni odziv*.

Opažamo da je

$$\lim u_C(t) = u_C(\infty) = E_T$$

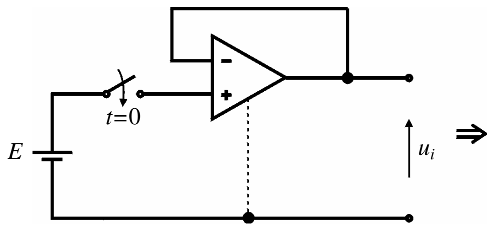
ali samo ako je $\tau > 0$. Ovo znači da se izraz (9) može napisati i ovako:

$$u_C(t) = \left[u_C(+0) - E_T\right]e^{-\frac{t}{\tau}} + E_T \;\; ; \;\; t \geq +0 \qquad (10)$$

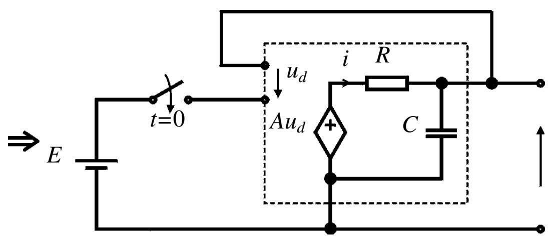
i za pozitivnu vremensku konstantu $\tau > 0$, prva komponenta potpunog odziva predstavlja *prijelazno stanje*, dok druga predstavlja *ustaljeno stanje*.

7.3.1. Primjer stabilne mreže

Odredit ćemo valni oblik izlaznog napona naponskog sljedila, slika 7.5.a, nakon uključenja sklopke u trenutku t=0, ako je poznat dinamički model operacijskog pojačala, slika 7.5.b.



Sl. 7.5.a Shema spoja uključenja naponskog sljedila.



Sl. 7.5.b Nadomjesna shema spoja.

U skladu sa slikom 7.2.b bit će $u_i = u_C$, $u_T = E_T$ odnosno

$$u_i = E_T - R_T i \qquad (11)$$

te treba odrediti Théveninov napon E_T i Théveninov otpor R_T.
U skladu s oznakama na slici 7.5.b vrijedi da je

$$u_i + u_d = E$$
$$Au_d - Ri = u_i$$

odakle nakon eliminacije varijable u_d dobivamo da je

$$u_i = \frac{A}{1+A}E - \frac{R}{1+A}i \qquad (12)$$

Usporede li se izrazi (11) i (12) proizlazi da je

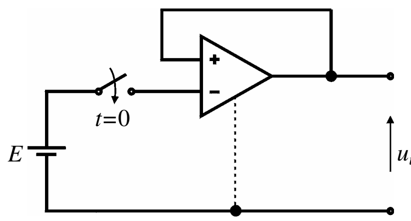
$$E_T = \frac{A}{1+A}E \;\; ; \;\; R_T = \frac{R}{1+A} > 0$$

te je valni oblik izlaznog napona, uzevši u obzir da je $u_C(+0)=0$, u skladu sa (9) jednak

$$u_i = E_T(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \;\; ; \;\; \tau = R_T C \qquad (13)$$

7.3.2 Primjer nestabilne mreže

Naponski izvor E iz prethodnog primjera priključimo na operacijsko pojačalo kako je to pokazano na slici 7.6. te odredimo valni oblik izlaznog napona nakon uključenja sklopke u trenutku t=0.



Sl. 7.6 Shema spoja uključenja operacijskog pojačala.

Sada vrijedi ovaj sustav jednažbi

$$u_d + E = u_i$$
$$Au_d - Ri = u_i$$

odakle nakon eliminacije varijable u_d dobivamo da je

$$u_i = \frac{A}{A-1}E - \left(-\frac{R}{A-1}\right)i \qquad (14)$$

Usporede li se izrazi (11) i (14) proizlazi da je

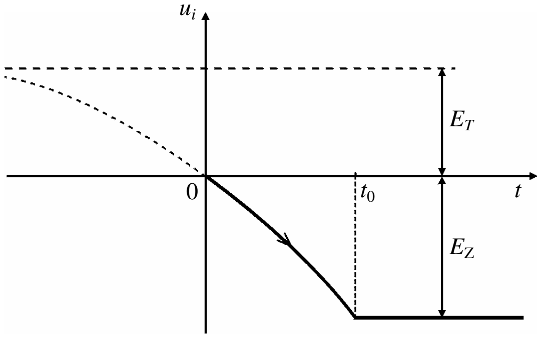
$$E_T = \frac{A}{A-1}E \;\; ; \;\; R_T = -\frac{R}{A-1} < 0$$

te je valni oblik izlaznog napona, uzevši u obzir da je $u_C(+0)=0$, u skladu s definicijom operacijskog pojačala (4.5) i izrazom (9) jednak

$$u_i = \begin{cases} E_T(1-e^{\frac{t}{\tau}}) & 0 \leq t \leq t_0 \\ -E_Z & t > t_0 \end{cases}$$

gdje je

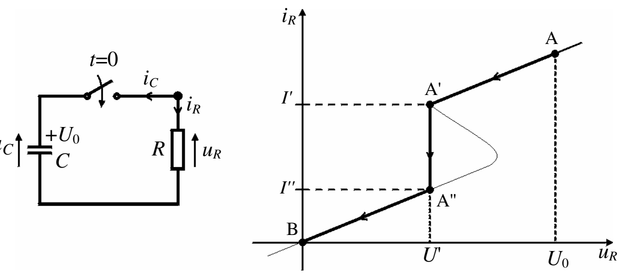
$$\tau = |R_T| \cdot C \quad ; \quad t_0 = \tau \ln(1 + \frac{E_Z}{E_T})$$



Sl. 7.7 Valni oblik izlaznog napona operacijskog pojačala.

7.3.3 Primjer za skok struje u nelinearnoj mreži

Odredit ćemo kvalitativno valni oblik struje u nelinearnoj mreži sheme spoja prema slici 7.8.a nakon uključenja sklopke u t=0. Kapacitet C je linearan vremenski nepromjenljiv dok je otpor nelinearan i u prvom kvadrantu u-i ravnine zadan karakteristikom prema slici 7.8.b.



a) b)

Sl. 7.8 a) Shema spoja sklopa u kojem nastupa skok struje.
b) Dinamički put na karakteristici otpora (A-A'-A''-B).

Od trenutka t=0 vrijedi da je $u_C = u_R$; $i_C + i_R = 0$, zbog čega vrijedi da je

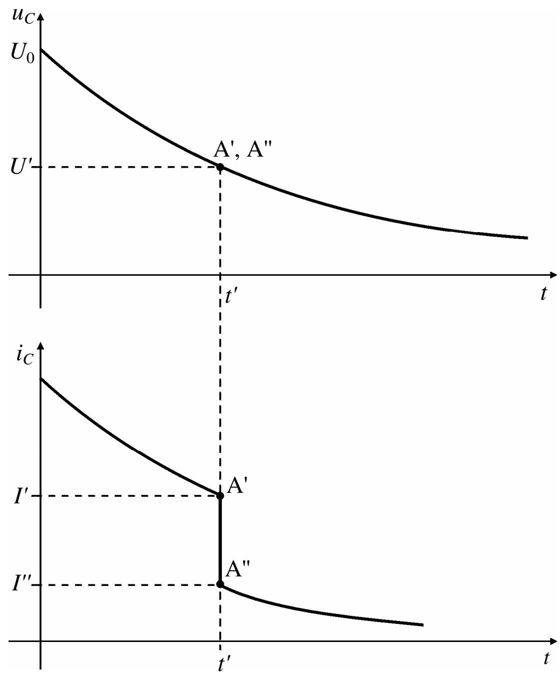
$$C\frac{du_R}{dt} + i_R = 0$$

Reprezentativna točka A putuje po karakteristici otpora i to do točke A' a zatim skače u točku A''. Zašto ?

U prvom kvadrantu je $i_R > 0$, što uz pretpostavljeni $C > 0$ znači da mora biti

$$\frac{du_R}{dt} < 0$$

tj. napon na otporu se može samo smanjivati. Ovo je moguće samo ako dođe do skoka struje. Put reprezentativne točke naziva se ***dinamički put***.



Sl. 7.9 Valni oblici napona i struje kapaciteta