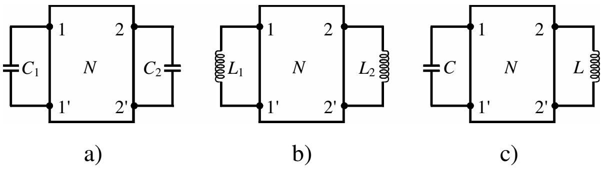
VIII. PREDAVANJE

Tri moguće varijante mreže drugog reda. Pojam kruga. Primjer serijskog *RLC*-kruga: faktor gušenja α, vlastita frekvencija ω_0, karakteristična jednadžba, prirodne frekvencije. Prigušeni odziv. Pseudoperiodični odziv (prigušeni titrajni krug). Posebni slučajevi: kritično prigušeni odziv, konzervativni odziv. Karakteristični parametri: dekrement titranja, faktor dobrote titrajnog kruga. Fizikalni smisao dekrementa titranja. Energetski odnosi u *RLC* -krugu: uvjet opstojnosti periodičkog režima rada (oscilatora).

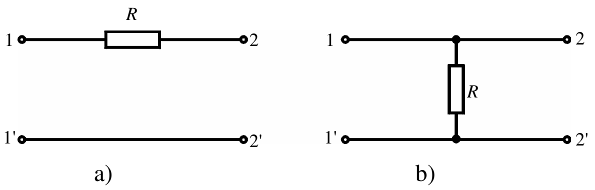
8. MREŽE DRUGOG REDA − SLOBODNI ODZIV

Svaka mreža koja se sastoji od ***dva nadomjesna reaktivna elementa***, jednog ili više otpora i nezavisnih izvora naziva se ***mrežom drugog reda***. Otpori i nezavisni izvori tvore *dvoprilaz N* na ulaze kojeg su spojeni reaktivni elementi, slika 8.1



Sl. 8.1 Tri moguće varijante mreže drugog reda.

Najveću raznolikost odziva omogućava treća varijanta mreže, slika 8.1.c. Najjednostavnije realizacije dvoprilaza *N* u kojima je još očuvana sva raznolikost odziva prikazuje slika 8.2

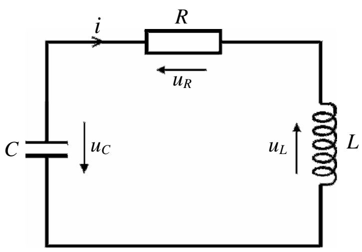


Sl. 8.2 Realizacije dvoprilaza *N* koje omogućuju tvorbu
a) serijskog *RLC*-kruga,
b) paralelnog *RLC*-kruga.

U nastavku analize prvo ćemo istražiti slobodni odziv, dakle ona svojstva mreže drugog reda koja ne ovise o poticaju, i to na primjeru *serijskog RLC-kruga* uz pretpostavku da su svi elementi mreže *linearni i vremenski nepromjenljivi*.

Pod pojmom ***kruga*** smatrat ćemo ubuduće svaku *strukturno jednostavniju mrežu*, dakle svaku mrežu s manjim brojem elemenata.

8.1 KARAKTERISTIČNA JEDNAŽBA



Sl. 8.3 Shema spoja serijskog *RLC*-kruga.

Vrijedi da je

$$u_L + u_R + u_C = 0$$

Budući da su elementi mreže linearni vremenski nepromjenljivi to dobivamo

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx = 0 \qquad (1)$$

Uvede li se umjesto struje $i(t)$ kao varijabla mreže naboj $q(t)$ proizlazi da je

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\left(\frac{R}{2L}\right)\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe će umjesto o *tri* parametra R, L i C ovisiti samo o *dva* parametra. To su :

a) ***faktor gušenja***

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad (2)$$

b) ***vlastita frekvencija***

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (3)$$

te diferencijalna jednadžba serijskog *RLC*-kruga poprima oblik

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (4)$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je oblika $\boldsymbol{q=Ke^{st}}$. Uvrstimo li pretpostavljeno rješenje u (4) dobivamo

$$Ke^{st}\cdot\left(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2\right) = 0$$

Ova jednadžba ima dva rješenja. Prvo rješenje, da je $q=Ke^{st} = 0$ je trivijalno, jer daje iskaz o "mrtvoj" mreži. Pravo rješenje je drugo rješenje, tj.

$$q = Ke^{st} \neq 0 \quad ; \quad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

jer nam ono kazuje nešto o mreži u kojoj je $q(t)\neq 0$!
Jednadžba

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \qquad (5)$$

naziva se ***karakteristična jednadžba***, a njena rješenja

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (6)$$

nazivaju se ***prirodne frekvencije*** kruga.

Napomene :

a) Neovisno o izboru varijable kojom je opisan serijski *RLC*-krug, karakteristična jednadžba ostaje ista s istim izrazima za određivanje parametara α i ω_0.

b) Neovisno o izboru varijable kojom je opisana neka mreža (krug) drugog reda i za bilo koju drugu mrežu (krug) drugog reda, karakteristična jednadžba je istog oblika (5), ali su izrazi za određivanje parametara α i ω_0 različiti.

Iz izloženog proizlazi da je zbog postojanja *oba nezavisna spremnika energije* (matematički: zbog oba nezavisna početna uvjeta!) opće rješenje diferencijalne jednadžbe (4) oblika

$$q = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \qquad (7)$$

gdje su K_1 i K_2 konstante koje treba tek odrediti iz početnih uvjeta.

Prirodne frekvencije s_1 i s_2 su ili *realni brojevi* ili *konjugirano kompleksni brojevi*. U skladu s pojmovima stabilne odnosno nestabilne mreže, uvedenim u poglavlju 6, proizlazi :

a) mreža je ***stabilna*** ako je

$$\mathrm{Re}\{s_1\} < 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{Re}\{s_2\} < 0 \qquad (8a)$$

b) mreža je ***nestabilna*** ako je

$$\mathrm{Re}\{s_1\} > 0 \quad \text{i/ili} \quad \mathrm{Re}\{s_2\} > 0 \qquad (8b)$$

8.2 ANALIZA KARAKTERISTIČNE JEDNADŽBE

U nastavku ograničimo se samo na razmatranje *stabilnih mreža*. U skladu sa (8a) i (6) ovo znači da vrijedi

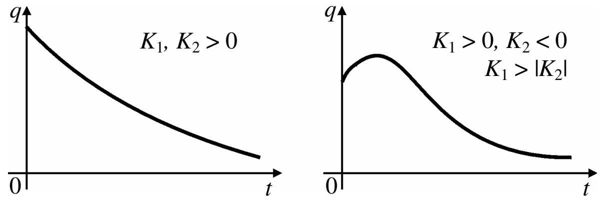
$$\alpha > 0 \qquad (9)$$

8.2.1 Prigušeni odziv

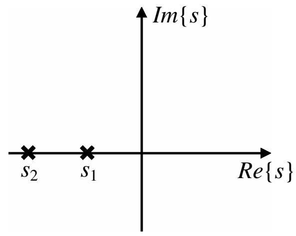
Ako je

$$\alpha > \omega_0 \qquad (10)$$

prirodne frekvencije s_1 i s_2 su *dva realna broja* i odziv (7) sastoji se od zbroja dviju eksponencijalnih funkcija realnog argumenta. Ovaj se odziv naziva ***prigušeni odziv***.



Sl. 8.4.a Dva tipična valna oblika prigušenog odziva.



Sl. 8.4.b Prikaz prirodnih frekvencija u ***ravnini kompleksnih frekvencija***.

8.2.2 Pseudoperiodični odziv

Ako je

$$\alpha < \omega_0 \qquad (11)$$

prirodne frekvencije s_1 i s_2 su dva konjugirano kompleksna broja oblika

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \quad ; \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad (12)$$

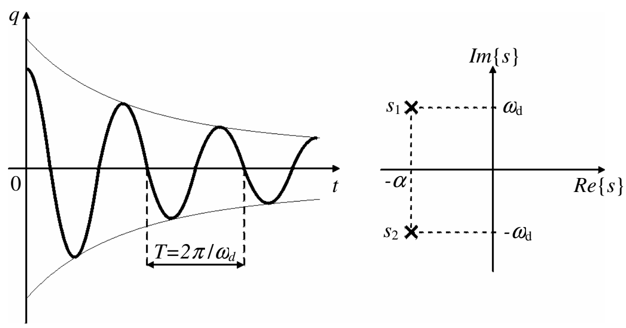
gdje se ω_d naziva *(kružna)* ***frekvencija pseudoperiodičnog odziva***. Odziv je oblika

$$q = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} = e^{-\alpha t}(K_1 e^{j\omega_d t} + K_2 e^{-j\omega_d t})$$

odnosno

$$q = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \vartheta) \qquad (13)$$

gdje su K i ϑ konstante koje treba odrediti iz početnih uvjeta.



a) b)

Sl. 8.5 a) Tipični valni oblik pseudoperiodičnog odziva.
b) Prikaz prirodnih frekvencija u ravnini kompleksnih frekvencija.

Valni oblik funkcije $q(t)$ prikazan je na slici 8.5.a. Amplituda oscilacija (titraja) $Ke^{-\alpha t}$ pada po eksponencijalnom zakonu i teži nuli kad $t \rightarrow \infty$. Funkcija (13) nije periodična, ali kako se ona poništava u nultočkama funkcije $\cos(\omega_d t + \vartheta)$ to i nultočke dolaze u pravilnim vremenskim intervalima trajanja π / ω_d te ima fizikalnog smisla govoriti o ***periodi pseudoperiodičnog odziva***

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

Krug u kojem se pojavljuje pseudoperiodični odziv naziva se ***(prigušeni) titrajni krug***.

8.2.3 Posebni slučajevi

a) ***Kritično prigušeni odziv***. Nastupa u slučaju ako je

$$\alpha = \omega_0 \tag{14}$$

a valni oblik odziva dan je izrazom

$$q = (K_1 t + K_2)e^{-\alpha t} \tag{15}$$

Napomena: U praksi treba nastojati postići kritično prigušeni odziv ako se želi:
- za zadane L i C *najbrža razgradnja* uskladištene energije u krugu, ili
- *minimalno vrijeme uspostavljanja ustaljenog stanja*, kao što je to čest slučaj u automatskom upravljanju. Pri tome se vrijeme uspostavljanja ustaljenog stanja obično definira kao vrijeme potrebno da promatrana varijabla dosegne 95% svoje ustaljene nenulte vrijednosti ili ako je ustaljeno stanje nulto stanje, kao vrijeme potrebno da promatrana varijabla padne na 5% od svoje početne vrijednosti.

b) ***Konzervativni odziv***. Nastupa u slučaju ako je

$$\alpha = 0 \tag{16}$$

a valni oblik odziva dan je izrazom

$$q = K\cos(\omega_0 t + \vartheta) \tag{17}$$

Krug u kojem se pojavljuje konzervativni odziv naziva se i ***neprigušeni titrajni krug***.

8.3 KARAKTERISTIČNI PARAMETRI TITRAJNOG KRUGA

Osim spomenutih parametara *faktora gušenja* α i *vlastite frekvencije* ω_0 u praksi se često koriste i druga dva parametra. To su

a) ***logaritmički pad*** ili ***dekrement titranja***

$$d = \ln\left|\frac{q(t)}{q(t+T)}\right| = \alpha T = 2\pi\frac{\alpha}{\omega_d} \tag{18}$$

b) ***faktor dobrote titrajnog kruga***

$$Q = 2\pi\frac{\text{uskladištena energija u krugu}}{\text{disipirana energija u krugu u periodi } T} \tag{19}$$

Definicija faktora dobrote titrajnog kruga Q *nije vezana* uz krugove drugog reda. Ako se uskladištena energija u krugu u nekom trenutku t označi sa $\mathcal{E}_\Sigma(t)$, onda će disipirana energija u krugu u periodi titranja T biti očigledno jednaka razlici

$$\mathcal{E}_\Sigma(t) - \mathcal{E}_\Sigma(t+T)$$

te se faktor dobrote titrajnog kruga Q može definirati izrazom

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\mathcal{E}_\Sigma(t)}{\mathcal{E}_\Sigma(t) - \mathcal{E}_\Sigma(t+T)} \tag{20}$$

Napomena : Faktor dobrote koristi se i u harmonijski poticanim krugovima pri analizi njihovih svojstava u okolišu rezonancije te kao jedan od kriterija pri iskazivanju kvalitete izvedenih zavojnica i kondenzatora reaktivnih filtara. U tim se slučajevima *faktor dobrote Q* definira umnoškom 2π i omjera ***najveće*** uskladištene energije i disipirane energije u krugu ili reaktivnoj komponenti tijekom jedne periode poticaja.

8.4 NEKE VAŽNE RELACIJE U TITRAJNIM KRUGOVIMA DRUGOG REDA

8.4.1 Određivanje faktora gušenja α

Svojstvo pseudoperiodičnog odziva (13) da je razmak između dva uzastopna maksimuma (minimuma) stalan i da iznosi $T=2\pi/\omega_d$ koristi se u praksi pri određivanju faktora gušenja α, odnosno za poznate L i C kruga pri određivanju otpora R titrajnog kruga. Naime, ako je m-ti maksimum jednak

$$A_m = Ke^{-\alpha t_0}\cos(\omega_d t_0 + \vartheta)$$

onda je očigledno m+n-ti maksimum jednak

$$A_{m+n} = Ke^{-\alpha(t_0+nT)}\cos\left[\omega_d(t_0+nT)+\vartheta\right]$$

odakle dobivamo izraz za faktor gušenja titrajnog kruga

$$\alpha = \frac{1}{nT}\ln\frac{A_m}{A_{m+n}} \tag{21}$$

a sve veličine na desnoj strani (21) lako su mjerive.

Napomena: Znamo li faktor gušenja α odredili smo i dekrement titranja $d=\alpha T$!

8.4.2 Određivanje faktora dobrote slabo prigušenog titrajnog kruga Q_0

Uskladištena energija u krugu drugog reda je

$$\mathcal{E}_\Sigma(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2+\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2C}q^2+\frac{1}{2}L(\frac{dq}{dt})^2$$

i koristeći izraz (13) dobivamo da je

$$\mathcal{E}_\Sigma(t)=\frac{1}{2}K^2e^{-2\alpha t}[(\frac{1}{C}+\alpha^2L)\cos^2(\omega_d t+\vartheta)+$$
$$+\omega_d^2L\sin^2(\omega_d t+\vartheta)+2\alpha\omega_d L\sin(\omega_d t+\vartheta)\cos(\omega_d t+\vartheta)]$$

Budući da je trajanje jedne periode $T=2\pi/\omega_d$, proizlazi da je

$$Q=2\pi\cdot\frac{\mathcal{E}_\Sigma(t)}{\mathcal{E}_\Sigma(t)-\mathcal{E}_\Sigma(t+T)}=\frac{2\pi}{1-e^{-4\pi\alpha/\omega_d}} \qquad (22)$$

Za slabo prigušeni krug vrijedi da je

$$\alpha<<\omega_0 \quad ; \quad \omega_d\sim\omega_0 \quad ; \quad T\sim 2\pi/\omega_0$$

te uzevši u obzir da je

$$1-e^{-4\pi\alpha/\omega_d}\approx 1-1+4\pi\alpha/\omega_0$$

dobivamo izraz za ***faktor dobrote slabo prigušenog titrajnog kruga Q_0***

$$Q\approx Q_0=\frac{\omega_0}{2\alpha} \qquad (23)$$

Što je faktor dobrote Q_0 veći, to se titraji sporije prigušuju. Iz izraza (21) proizlazi, ako se stavi da je $n=Q_0$,

$$\frac{A_{m+Q}}{A_m}=e^{-\alpha Q_0 T}\approx e^{-\alpha\frac{\omega_0}{2\alpha}\cdot\frac{2\pi}{\omega_0}}=e^{-\pi}\approx 0{,}043$$

što znači da se u slabo prigušenom titrajnom krugu "amplituda" titraja *smanji na 4.3%* od početne amplitude nakon *isteka od Q_0 perioda*. Tako se Q_0 može lako izmjeriti.

Opažamo da je ***dekrement titranja slabo prigušenog titrajnog kruga d_0*** jednak

$$d_0=\alpha T_0=2\pi\frac{\alpha}{\omega_0}=\frac{\pi}{Q_0}$$

Na osnovi izraza (22) lako dobivamo da je

$$\frac{\mathcal{E}_\Sigma(t)-\mathcal{E}_\Sigma(t+T)}{\mathcal{E}_\Sigma(t)+\mathcal{E}_\Sigma(t+T)}=\frac{1-e^{-4\pi\alpha/\omega_d}}{1+e^{-4\pi\alpha/\omega_d}}\approx\frac{4\pi\alpha}{2\omega_d}=2\pi\frac{\alpha}{\omega_0}=d_0$$

što daje jasni *fizikalni smisao* pojmu dekrementa titranja d_0!

8.5 ENERGETSKI ODNOSI U RLC-KRUGU

Krug prema slici 8.3 dobro je definiran, varijabla *i=dq/dt* zbog toga je neprekinuta, te se njome smije pomnožiti diferencijalna jednadžba (1). Proizlazi

$$L i\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}+Ri^2=0$$

Budući da je ukupna uskladištena energija u krugu

$$\mathcal{E}_\Sigma(t)=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2C}q^2$$

to dobivamo da vrijedi :

$$\frac{d\mathcal{E}_\Sigma}{dt}+Ri^2=0 \qquad (24)$$

a) ***Otpor R je pozitivan***. Budući da je $i^2(t)\geq 0$; $R>0$, to mora biti

$$\frac{d\mathcal{E}_\Sigma}{dt}<0$$

što znači da ***proces trne***, jer u krugu postoji samo konačna prethodno uskladištena energija.

b) ***Otpor R je negativan***. Budući da je $i^2(t)\geq 0$; $R<0$, to mora biti

$$\frac{d\mathcal{E}_\Sigma}{dt}>0$$

što znači da se ***proces raspiruje***, tj sa $R<0$ označen je model izvora električne energije.

c) ***Periodički režim rada***. Ako je periodički režim rada moguć, tj. ako je

$$\mathcal{E}_\Sigma(t)=\mathcal{E}(t+T) \qquad (25)$$

gdje je T perioda rada, onda iz jednadžbe (24) vidimo da je uvjet periodičkog režima rada (25) zadovoljen samo ako je

$$\int_t^{t+T}Ri^2dt=0 \qquad (26)$$

a ovaj se uvjet može zadovoljiti samo ako je $R=R(t)\gtreqless 0$. Dakle otpor R mora biti ***vremenski promjenljiv***, ali tako da u dijelu periode T iskazuje svojstva *pasivnog* otpora a u drugom dijelu periode T svojstva *aktivnog* otpora.

Jednadžba (26) predstavlja ***uvjet opstojnosti*** svakog ***oscilatora*** napajanog iz istosmjernog izvora !

Napomena: Jednadžba (26) izvedena je iz energetskih svojstava kruga u kojem *ne djeluju* nezavisni izvori. Da izloženo zaključivanje vrijedi i za istosmjerne krugove drugog reda pokazat će se u idućem poglavlju!