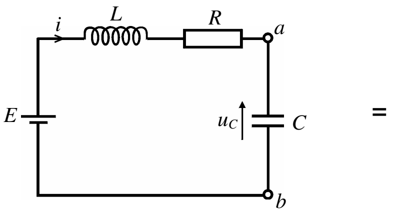
IX. PREDAVANJE

Istosmjerni krugovi. Određivanje slobodnog odziva. Uvjeti pod kojima se prisilni odziv može shvatiti kao poseban slučaj slobodnog odziva. Postupak određivanja potpunog odziva kao zbroja prijelaznog i ustaljenog stanja. Energetski odnosi u *RLC*-krugu : disipirana energija ovisi samo o karakteristici kapaciteta.
Jednoharmonijski krugovi. Postupak za određivanje ustaljenog stanja. Potpuni konzervativni odziv : harmonijske oscilacije, podharmonijske oscilacije, nadharmonijske oscilacije, nadpodharmonijske oscilacije.

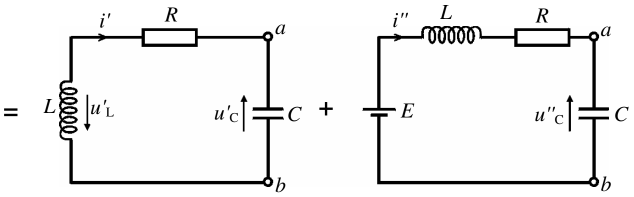
9. MREŽE DRUGOG REDA − POTPUNI ODZIV

9.1 ISTOSMJERNI KRUGOVI

Potpuni odziv jednak je zbroju slobodnog odziva i prisilnog odziva. Pokažimo postupak određivanja potpunog odziva na primjeru linearnog vremenski nepromjenljivog serijskog *RLC*-kruga priključenog na istosmjerni naponski izvor *E*.



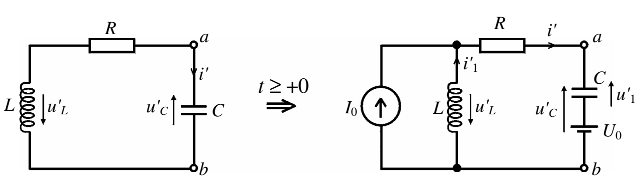
$i(-0) = I_0$
$u_C(-0) = U_0$



$i'(-0) = I_0$ $\quad$ $i''(-0) = 0$
$u'_C(-0) = U_0$ $\quad$ $u''_C(-0) = 0$

Sl. 9.1 Potpuni odziv jednak je zbroju slobodnog odziva i prisilnog odziva ($i = i'+i''$, $u_C = u'_C+u''_C$).

9.1.1 Određivanje slobodnog odziva



$u'_C(-0) = U_0$ $\quad$ $u'_1(+0) = 0$
$i'(-0) = I_0$ $\quad$ $i'_1(+0) = 0$
a) $\quad$ b)

Sl. 9.2 a) Shema spoja serijskog *RLC*-kruga s nenultim početnim uvjetima.
b) Nadomjesna shema spoja serijskog *RLC*-kruga za $t \geq +0$.

Nadomjesna shema spoja, slika 9.2b, postaje nam očigledna ako se u skladu s izloženim u poglavljima 6 i 3 sjetimo da je

$$u'_C(-0) = u'_C(+0) = U_0 \quad ; \quad i'(-0) = i'(+0) = I_0$$

odnosno za $t \geq +0$

$$u'_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i'(x)dx + u'_c(+0) = u'_1 + U_0 = \frac{1}{C}q' + U_0$$

$$i'(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u'_L(x)dx + i'(+0) = i'_1 + I_0$$

Krug je opisan diferencijalnom jednadžbom (8.4), rješenje koje, pretpostavimo li pseudoperiodični odziv, možemo napisati u obliku (8.13), ili što je isto, u obliku

$$q' = e^{-\alpha t}(K_1 \cos\omega_d t + K_2 \sin\omega_d t) \qquad (1)$$

Kako je $q'(+0)=CU_0$, proizlazi iz (1) da je $K_1=CU_0$. Deriviramo li izraz (1) bit će

$$i' = \frac{dq'}{dt} = e^{-\alpha t}(-\omega_d K_1 \sin\omega_d t + \omega_d K_2 \cos\omega_d t) -$$
$$- \alpha e^{-\alpha t}(K_1 \cos\omega_d t + K_2 \sin\omega_d t)$$

i gdje nakon uvrštenja da je

$$i'(+0) = \frac{dq'}{dt}\Big|_{+0} = I_0$$

dobivamo da je

$$K_2 = \frac{I_0 + \alpha K_1}{\omega_d} = \frac{I_0 + CU_0}{\omega_d}$$

te je slobodni odziv dan izrazom

$$q' = e^{-\alpha t}\left(CU_0 \cos\omega_d t + \frac{I_0 + \alpha CU_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right) \qquad (2)$$

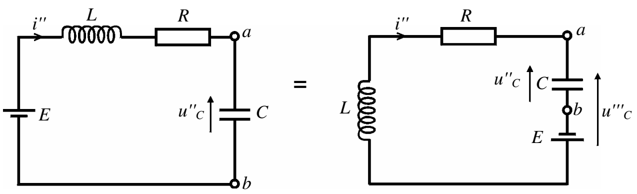
9.1.2 Određivanje prisilnog odziva

Sa stajališta analize *nema razlike* između *početnog napona na kapacitetu* $u_C(-0)$ i *nezavisnog naponskog izvora* $E=u_C(-0)$ spojenog u seriju s kapacitetom, odnosno *početne struje kroz induktivitet* $i_L(-0)$ i *nezavisnog strujnog izvora* $I_0=i(-0)$ spojenog paralelno induktivitetu.

U analiziranom slučaju to znači da se prisilni odziv *q*” može odmah odrediti iz (2) ako se stavi da je $i''(+0)=0$; $u'''_C(+0) = -E$, dok je

$$u'''_C = u''_C - E = \frac{1}{C}q'' - E$$

Dakle, naponski izvor E jer je spojen u seriju s kapacitetom shvaća se kao "početni napon" na kapacitetu C, slika 9.3.



Sl. 9.3 Prisilni odziv kao posebni slučaj slobodnog odziva.

Proizlazi da je

$$q''=e^{-\alpha t}(-CE\cos\omega_d t+\frac{-\alpha\, CE}{\omega_d}\sin\omega_d t)+CE \quad (3)$$

9.1.3 Određivanje potpunog odziva kao zbroja slobodnog i prisilnog odziva

Zbrojivši izraze (2) i (3) dobivamo potpuni odziv analiziranog kruga

$$\begin{aligned} q=q'+q''=e^{-\alpha t}[C(U_0-E)\cos\omega_d t+ \\ +\frac{I_0+\alpha\, C(U_0-E)}{\omega_d}\sin\omega_d t]+CE \end{aligned} \quad (4)$$

VAŽNO: Poznavanje slobodnog odziva dovoljno je da se *odmah odredi* potpuni odziv u svim istosmjernim krugovima drugog reda u kojima je istosmjerni naponski izvor spojen u seriju s kapacitetom i/ili u kojima je istosmjerni strujni izvor spojen paralelno induktivitetu.

9.1.4 Određivanje potpunog odziva kao zbroja prijelaznog i ustaljenog stanja

Druga mogućnost određivanja potpunog odziva jest da se jednadžba kruga prema slici 9.1 napiše u obliku nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe, tj. da se iz uvjeta

$$u_L+u_R+u_C=E$$

dobije jednadžba oblika

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\alpha\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=\frac{E}{L} \quad (5)$$

rješenje koje se može iskazati kao zbroj rješenja *homogene diferencijalne jednadžbe* i *jednog partikularnog rješenja*.

Za stabilne krugove s konstantnim ili periodičkim poticajem vrijedi da je:

a) rješenje homogene diferencijalne jednadžbe ≡ prijelazno stanje
b) partikularno rješenje ≡ ustaljeno stanje

U promatranom primjeru, u ustaljenom stanju je očigledno q_s=*konst.*, što uvršteno u (5) daje odmah da je

$$q_s=CE$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe (8.4), pretpostavi li se pseudoperiodični odziv, je oblika (1), pa se potpuni odziv dobiva da je

$$q=q_p+q_s=e^{-\alpha t}(K_1'\cos\omega_d t+K_2'\sin\omega_d t)+CE$$

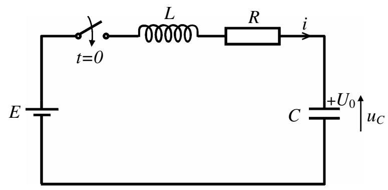
odakle se uvrstivši početne uvjete dobiva izraz (4), tj. isti izraz kao i prije.

VAŽNO:

a) Konstante K_1' i K_2' određuju se iz ***potpunog odziva***.
b) Valni oblici odziva u prijelaznom stanju ***ne ovise*** o valnim oblicima poticaja, nego isključivo o prirodnim frekvencijama kruga.

9.1.5 Energetski odnosi u RLC-krugu

Odredimo koliko energije treba odati istosmjerni izvor napona E da se, prema shemi spoja na slici 9.4, kapacitet početno nabijen na napon $U_0 < E$ nabije na napon istosmjernog izvora i koliko se energije W_R pretvori u toplinu na otporu R !



Sl. 9.4 Shema spoja nabijanja kapaciteta.

U skladu s postavljenom zadaćom bit će $q(-0)=CU_0$, $i(-0)=0$. Zato što je krug dobro definiran bit će $q(+0)=q(-0)$ te $i(+0)=i(-0)$, a nakon utrnuća prijelazne pojave

$$q(\infty)=CE \quad ; \quad i(\infty)=0$$

jer smo pretpostavili da je krug *stabilan*.

Jednadžba ravnoteže glasi

$$Li\frac{di}{dt}+Ri^2+\frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}=Ei$$

Nakon integriranja od trenutka t=0 do t=∞ dobivamo

$$\frac{1}{2}Li^2\Big|_{i(0)}^{i(\infty)}+R\int_0^\infty i^2dt+\frac{1}{2C}q^2\Big|_{q(0)}^{q(\infty)}=E\int_0^\infty idt=E\big[q(\infty)-q(0)\big]$$

Prvi član je zbog $i(0)=i(\infty)=0$ jednak nuli te dobivamo da je energija koju treba odati izvor jednaka

$$W_{\mathrm{E}}(0,\infty)=E\big[CE-CU_0\big]$$

tj.

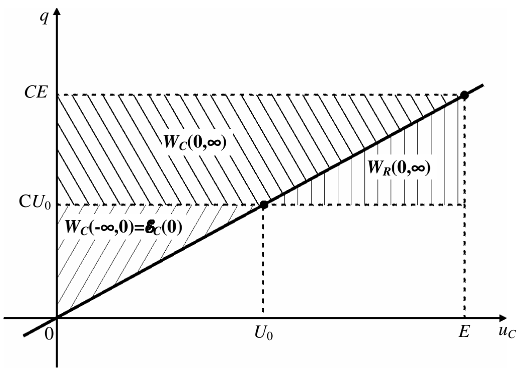
$$W_E(0,\infty)=CE(E-U_0) \quad (6)$$

a energija pretvorena u toplinu je

$$W_R(0,\infty)=R\int_0^\infty i^2dt=\frac{1}{2C}\big[q^2(\infty)-q^2(0)\big]-CE(E-U_0)$$

tj.

$$W_R(0,\infty)=\frac{1}{2}C(E-U_0)^2 \quad (7)$$



Sl. 9.5 Grafički prikaz energetskih odnosa na karakteristici kapaciteta.

VAŽNO:

a) Dobiveni rezultati ***ne ovise o vrsti odziva***.
b) Za u praksi posebno važan slučaj kad je $u_C(-0)=0$ proizlazi da je

$$W_R(0,\infty) = \mathscr{E}_C(\infty) = \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}W_E(0,\infty) \qquad (8)$$

POOPĆENJE: Pretpostavimo isti krug kao na slici 9.4, ali neka su sva tri elementa mreže *nelinearna*, neka je krug *stabilan* a funkcija $i(\varphi)$ kojom je opisan induktivitet *jednoznačna*. Vrijedi :

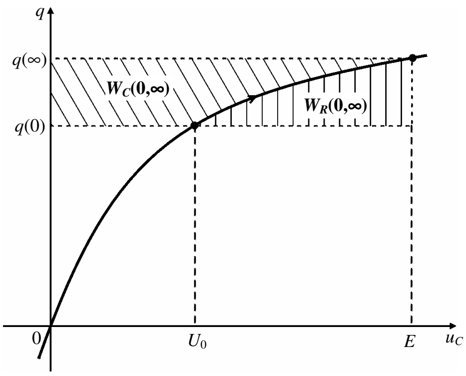
$$\frac{d\varphi}{dt} + u_R + u_C = E \;\Big/\; i = \frac{dq}{dt} \;\Big/\; \int_0^t ...dt$$

Dobivamo da je

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\infty)} i d\varphi + \int_0^\infty u_R i_R dt + \int_{q(0)}^{q(\infty)} u_C dq = E\int_{q(0)}^{q(\infty)} dq$$

U ustaljenom stanju je $\varphi(\infty) = \varphi(0) = 0$, te je zbog jednoznačnosti funkcije $i(\varphi)$ prvi integral jednak nuli, odnosno vrijedi da je

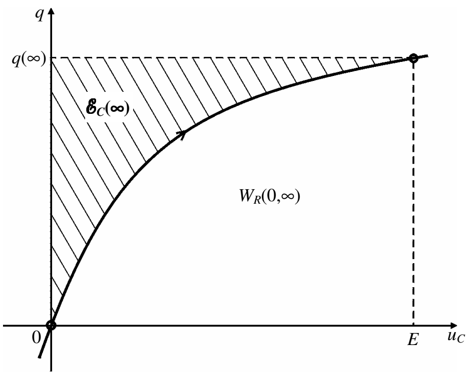
$$W_R(0,\infty) + W_C(0,\infty) = E\left[q(\infty) - q(0)\right]$$



Sl. 9.6 Grafički prikaz energetskih odnosa na karakteristici nelinearnog kapaciteta za slučaj da je kapacitet nabijen prethodno na napon $u_C(-0)=U_0$.

što za slučaj nenabijenog kapaciteta vodi na izraz

$$W_R(0,\infty) + \mathscr{E}_C(\infty) = Eq(\infty)$$



Sl. 9.7 Grafički prikaz energetskih odnosa na karakteristici nelinearnog kapaciteta za slučaj da je kapacitet prethodno nenabijen.

VAŽNO: Ako je prethodno nenabijeni kapacitet *linearan i vremenski nepromjenljiv*, bit će uvijek zadovoljen uvjet (8) *neovisno* o tome jesu li otpor i induktivitet u krugu *linearni ili nelinearni*.

9.2 JEDNOHARMONIJSKI KRUGOVI

9.2.1 Određivanje potpunog odziva

Ako se serijski *RLC*-krug uključi na jednoharmonijski izvor napona valnog oblika

$$u = \hat{U}\cos\omega t$$

potpuni odziv je određen rješenjem diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\hat{U}}{L}\cos\omega t \qquad (9)$$

Znamo da se u linearnoj vremenski nepromjenljivoj mreži ne mogu pojaviti frekvencije različite od onih u poticaju (*izomorfnost* odziva i poticaja!). Zbog toga je odziv na poticaj u obliku jednoharmonijske funkcije frekvencije ω u ustaljenom stanju također jednoharmonijska funkcija iste frekvencije ω.

S druge strane, kvalitativno, prijelazno stanje uopće ne ovisi o vrsti poticaja (funkciji poticaja). Proizlazi da je rješenje diferencijalne jednadžbe (9) dano izrazom

$$q = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \hat{Q}\cos(\omega t - \psi)$$

pa se zadaća određivanja potpunog odziva svodi na određivanja još nepoznatih konstanata $\hat{Q}$ i ψ, s pomoću kojih je u potpunosti opisano *ustaljeno stanje*.

Pretpostavljeno rješenje u ustaljenom stanju

$$q_s = \hat{Q}\cos(\omega t - \psi)$$

i pripadne derivacije uvrste se u polaznu diferencijalnu jednadžbu (9). Proizlazi:

$$-\omega^2\hat{Q}\cos(\omega t-\psi)-2\alpha\omega\hat{Q}\sin(\omega t-\psi)+$$
$$+\omega_0^2\hat{Q}\cos(\omega t-\psi)=\frac{\hat{U}}{L}\cos\omega t$$

Ova jednadžba mora vrijediti *za svaki trenutak t*, a to je moguće samo ako se rastavi u *dvije nezavisne jednadžbe članova* uz ortogonalne funkcije $\cos\omega t$ i $\sin\omega t$.
Za članove uz $\cos\omega t$ mora vrijediti:

$$-\omega^2\hat{Q}\cos\psi+2\alpha\omega\hat{Q}\sin\psi+\omega_0^2\hat{Q}\cos\psi=\frac{\hat{U}}{L}$$

a za članove uz $\sin\omega t$:

$$-\omega^2\hat{Q}\sin\psi-2\alpha\omega\hat{Q}\cos\psi+\omega_0^2\hat{Q}\sin\psi=0$$

Iz ovih dviju jednadžbi proizlazi da je

$$\hat{Q}=\frac{\hat{U}}{L}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}\quad;\quad\psi=\mathrm{arctg}\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\qquad(10)$$

čime je postavljena zadaća u potpunosti riješena.

9.2.2 Potpuni konzervativni odziv - mogući režimi rada

Odredimo potpuni odziv kruga ako je $\alpha=0$. Tada je prema (10) i (8.17)

$$\hat{Q}=\frac{\hat{U}}{(\omega_0^2-\omega^2)L}\quad;\quad\psi=0\quad;\quad\omega_d=\omega_0$$

te je potpuni konzervativni odziv dan izrazom

$$q=K_1\cos\omega_0 t+K_2\sin\omega_0 t+\hat{Q}\cos\omega t\qquad(11)$$

Iz prethodnih poglavlja znamo da je *u nelinearnim krugovima* moguće postići da faktor gušenja α bude jednak nuli, te ima smisla analizirati izraz (11) i pitati se pod kojim uvjetom će funkcija $q(t)$ biti periodična ?

Budući da nas interesira samo kvalitativno periodičko rješenje, to je za određivanje konstanata K_1 i K_2 dovoljno odabrati najjednostavniji slučaj $q(0)=Q_0$ i $dq/dt|_0=0$. Dobivamo da je

$$q=(Q_0-\hat{Q})\cos\omega_0 t+\hat{Q}\cos\omega t$$

Funkcija $q(t)$ je periodična ako su periode $T_0=2\pi/\omega_0$ i $T=2\pi/\omega$ sumjerljive, tj. ako se njihov međusobni odnos može prikazati kao

$$T=\frac{m}{n}T_0\qquad(12)$$

gdje su m i n relativno prosti brojevi. Perioda funkcije $q(t)$ je tada jednaka

$$T_z=nT=mT_0\qquad(13)$$

VAŽNO: Relativno prosti brojevi m i n u tehnici moraju biti takovi da zajednička perioda T_z bude sigurno *unutar intervala opažanja periodične pojave* !

Zaključujemo : Na osnovi (11) i (12) proizlaze *četiri karakteristična tipa oscilacija* (titranja) :

a) ***harmonijske oscilacije***

$$Q_0=\hat{Q}$$

b) ***podharmonijske oscilacije***

$$m=1;\ T_0=nT,\ n>1;\quad Q_0\neq\hat{Q}$$

c) ***nadharmonijske oscilacije***

$$n=1;\ T_0=T/m,\ m>1;\quad Q_0\neq\hat{Q}$$

d) ***nadpodharmonijske oscilacije***

$$m\neq1,\ n\neq1;\quad Q_0\neq\hat{Q}$$