X. PREDAVANJE

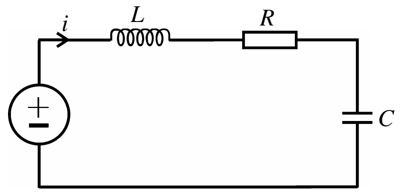
Ograničenje na linearne vremenski nepromjenljive mreže i jednoharmonijski poticaj. Pretvorba integrodiferencijalne jednadžbe u algebarsku jednadžbu. Pojam transformacije. Pojam fazora. Osnovna pravila fazorske transformacije. Frekvencijsko područje. O kvocijentu fazora. Pojam funkcije mreže. Ulazne i prijenosne funkcije mreže. Frekvencijski odziv. Pojmovi impedancije i admitancije. Ulazne funkcije mreže za otpor, kapacitet i induktivitet. Frekvencijski odziv otpora, kapaciteta i induktiviteta.

III. SINUSOIDALNO USTALJENO STANJE

10. FAZORSKA TRANSFORMACIJA

10.1 ODREĐIVANJE USTALJENOG STANJA KLASIČNIM POSTUPKOM

Postupak određivanja ustaljenog stanja pokazat će se na primjeru serijskog *RLC*-kruga napajanog iz naponskog izvora $u = \hat{U}\cos\omega t$, sl. 10.1. Ovaj postupak vrijedi samo



Sl. 10.1 Shema spoja serijskog *RLC*-kruga.

za ***linearne vremenski nepromjenljive mreže*** priključene na ***jednoharmonijski izvor***.

U skladu sa KZN, vrijedi da je

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(x)dx = \hat{U}\cos\omega t \qquad (1)$$

Budući da nas zanima samo ustaljeno stanje, bit će u skladu s definicijom neodređenog integrala

$$\int_{-\infty}^{t} i(x)dx = \int_{-\infty}^{t_0} i(x)dx + \int_{t_0}^{t} i(x)dx = \int i(t)dt \quad ; \; t_0 \text{ - po volji}$$

što je i fizikalno očigledno, budući da *početna vrijednost naboja* dobivena integriranjem od $t = -\infty$ do nekog trenutka po volji t_0 ionako ***ne utječe*** na ustaljeno stanje! Time diferencijalna jednadžba (1) prelazi u oblik

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = \hat{U}\cos\omega t \qquad (2)$$

i ima *fizikalni smisao* samo pri određivanju *ustaljenog stanja.*

Jedan od načina rješavanja ove jednadžbe je pokazan u odsječku 9.2.1. Drugi način, kraći i jednostavniji jest da se koristi Eulerov identitet

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t = \Re e\{e^{j\omega t}\} + j\Im m\{e^{j\omega t}\}$$

te se funkcija poticaja $u = \hat{U}\cos\omega t$ i pretpostavljeni odziv (u ustaljenom stanju) $i = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$ napišu u obliku

$$u = \hat{U}\cos\omega t = \hat{U}\,\Re e\{e^{j\omega t}\}$$

$$i = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi) = \hat{I}\,\Re e\{e^{j(\omega t + \varphi)}\}$$

pri čemu su *amplituda* $\hat{I}$ i *početni kut* φ nepoznate veličine koje valja odrediti . Očigledno je

$$\frac{di}{dt} = \hat{I}\,\Re e\{j\omega e^{j(\omega t + \varphi)}\} \quad ; \quad \int i\,dt = \hat{I}\,\Re e\left\{\frac{1}{j\omega}e^{j(\omega t + \varphi)}\right\}$$

Uvrstimo li ove izraze u (2) , dobivamo da je

$$\begin{aligned} &L\hat{I}\,\Re e\{j\omega e^{j(\omega t+\varphi)}\} + R\hat{I}\,\Re e\{e^{j(\omega t+\varphi)}\} + \\ &+ \frac{\hat{I}}{C}\Re e\left\{\frac{1}{j\omega}e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} = \hat{U}\,\Re e\{e^{j\omega t}\} \end{aligned} \qquad (3)$$

Jednadžba (3) izražava jednakost između realnih dijelova dvaju kompleksnih brojeva. No ona sigurno vrijedi i ako su ta dva kompleksna broja jednaka a ne samo njihovi realni dijelovi! Zbog toga operator $\mathscr{Re}\{...\}$ možemo ispustiti

$$\begin{aligned} &L\hat{I}\,j\omega \cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\varphi} + R\hat{I}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\varphi} + \frac{\hat{I}}{C}\frac{1}{j\omega}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\varphi} = \\ &= \hat{U}\cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Nakon množenja ove jednadžbe sa $e^{-j\omega t}$, dobivamo da je

$$\hat{I}\left[R + j\,(\omega L - \frac{1}{\omega C})\right] e^{j\varphi} = \hat{U} \qquad (4)$$

Polazna *integro-diferencijalna jednadžba* (2) svedena je na *algebarsku jednadžbu* (4) !

U izrazu (4) prvo izjednačimo *module*, a zatim *fazne kuteve.* Proizlazi

$$|\,\hat{I}\,|\cdot|\,R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\,|\cdot|\,e^{j\varphi}\,| = |\,\hat{U}\,|$$

$\hat{I}$ i $\hat{U}$ su realni pozitivni brojevi, a u skladu s Eulerovim identitetom očigledno je

$$\left|e^{j\varphi}\right| \equiv 1$$

dok je

$$\left|R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

te je amplituda struje jednaka

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad (5)$$

Izjednačavanjem faznih kuteva u izrazu (4) proizlazi

$$0 + arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + \varphi = 0$$

odnosno

$$\varphi = -arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \qquad (6)$$

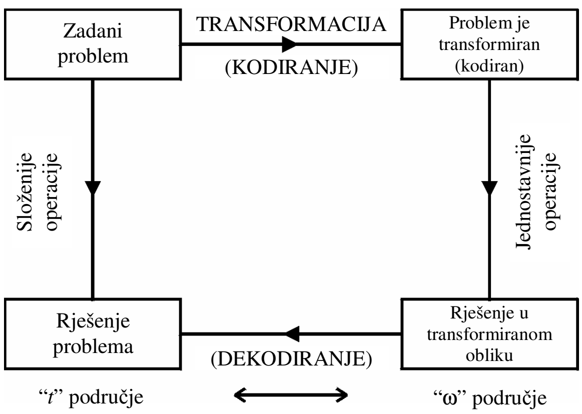
čime je postavljena zadaća riješena. Struja u ustaljenom stanju dana je izrazom

$$i = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos\left(\omega t - arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

10.2 OSNOVNA IDEJA FAZORSKE TRANSFORMACIJE (K. P. Steinmetz , 1893.)

Postupak opisan u prethodnom odsječku može se posve formalizirati uvođenjem pojma ***fazorske transformacije***.

- ***Transformacija***. Pojednostavljeni postupak da se obavi nešto što je inače teško .



Sl. 10.2 Metoda transformacije.

Transformacija ima smisla ako se zadani problem može riješiti na *jednostavniji način* i ako postoji *skup pravila* za kodiranje odnosno dekodiranje .

- ***Fazor***.
  Kompleksni broj kojim je prikazana jednoharmonijska funkcija.

Fazorska transformacija se sastoji u tome da se jednoharmonijska funkcija :

$$f(t) = \hat{A}\cos(\omega t + \varphi) = \hat{A} \cdot \Re e\left\{e^{j(\omega t + \varphi)}\right\}$$

prikaže (transformira) (kodira) kompleksnim brojem (fazorom) $\dot{A}$,

$$f(t) = \hat{A}\cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \dot{A} = \hat{A}e^{j\varphi} \qquad (7)$$

Pri tome znak $\leftrightarrow$ pokazuje da je ova transformacija ***dvostrana***, tj. moguć je prijelaz iz vremenskog područja u kompleksne brojeve i obratno. Znak $\leftrightarrow$ se obično čita kao "preslikava u" ili "transformira u".

Potpuno bi bilo krivo pomisliti da je transformacija dana izrazom (7) jedina moguća. Ona je samo *najjednostavnija* jer vodi na to da je

$$\hat{A}\cos\omega t \leftrightarrow \hat{A} \qquad (8a)$$

tj. da je jednoharmonijska funkcija $\hat{A}\cos\omega t$ prikazana odsječkom duljine $\hat{A}$ na realnoj osi ravnine kompleksnih brojeva.

Budući da je fazor kompleksni broj kojim je prikazana jednoharmonijska funkcija, nema nikakvih razloga da se u najopćenitijem slučaju ne definira fazorska transformacija kao

$$\hat{A}\cos\omega t \leftrightarrow a + jb$$

gdje je $\hat{A} = \sqrt{a^2 + b^2}$, a kut ψ za koji su zarotirane osi koordinatnog sustava je jednak ψ = arctg b/a. Naravno, to je suvišna komplikacija, pa se to nikad ne radi. U praksi se, osim prethodno navedene, izraz (8a), često koristi i ova jednostavna transformacija

$$\hat{A}\sin\omega t \leftrightarrow \hat{A} \qquad (8b)$$

ili ponekad

$$\hat{A}\sin\omega t \leftrightarrow j\hat{A}.$$

Zaključimo: Analiza mreže u sinusoidalnom ustaljenom stanju s pomoću fazora započinje nakon što je *unaprijed zadan ili dogovoren* način preslikavanja (transformacije), recimo s pomoću izraza (8a) ili (8b). Prije nego što se zada ili dogovori način transformacije pitanja poput: Zadan je fazor, kako glasi pripadna jednoharmonijska funkcija?, ili obratno pitanje, nemaju nikakva smisla!

10.3 OSNOVNA PRAVILA FAZORSKE TRANSFORMACIJE

a) Fazorska transformacija je ***linearna transformacija***.

Ako za dvije jednoharmonijske funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ vrijedi :

$$f_1(t) \leftrightarrow \dot{A}_1 \quad ; \quad f_2(t) \leftrightarrow \dot{A}_2$$

tada vrijedi i da je :

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \leftrightarrow \alpha \dot{A}_1 + \beta \dot{A}_2 \qquad (9)$$

gdje su α i β konstante .

b) Fazorska transformacija ***deriviranja***

$$f(t) = \Re e\left\{ \hat{A} e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} \leftrightarrow \dot{A}$$

$$\frac{df}{dt} = \Re e\left\{ j\omega \hat{A} e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} \leftrightarrow j\omega \dot{A} \qquad (10)$$

c) Fazorska transformacija ***integriranja***

$$f(t) = \Re e\left\{ \hat{A} e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} \leftrightarrow \dot{A}$$

$$\int f(t)dt = \Re e\left\{ \frac{\hat{A}}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{A} \qquad (11)$$

Napomena: Za operacije s kompleksnim brojevima, kad ih smatramo fazorima, kažemo da su to operacije u ***frekvencijskom ω - području***, za razliku od originalnog ***vremenskog t - područja***.

Pitanje :
Zašto kvocijent fazora nije fazor ?

Ako je svaki fazor kompleksni broj a dijeljenjem fazora se ponovno dobiva neki kompleksni broj, onda zbog dvostranosti fazorske transformacije izgleda da je i taj kompleksni broj fazor !

a) Formalni odgovor da dijeljenje nije linearna operacija, pa prema tome rezultat dijeljenja nije fazor, je točan, ali ne djeluje kao zadovoljavajući odgovor !
b) Neka su zadane dvije jednoharmonijske funkcije

$$f_1(t) = \hat{A}_1 \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \dot{A}_1 = \hat{A}_1 e^{j\varphi} \quad ; \quad \hat{A}_1 = \sqrt{2} A_1$$

$$f_2(t) = \hat{A}_2 \cos(\omega t + \psi) \leftrightarrow \dot{A}_2 = \hat{A}_2 e^{j\psi} \quad ; \quad \hat{A}_2 = \sqrt{2} A_2$$

Kvocijentu fazora ne odgovara u vremenskom području kvocijent pripadnih vremenskih funkcija :

$$\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\varphi - \psi)} \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \cos[\omega t + (\varphi - \psi)] \neq \frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{A_1}{A_2} \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\cos(\omega t + \psi)} = g(t)$$

a funkcija $g(t)$ nije jednoharmonijska funkcija. Zbog toga *kvocijent fazora nije fazor*, a analogno vrijedi i za *umnožak fazora.*

Primjer :
Odredite valni oblik struje kruga prema slici 10.1 koristeći fazorsku transformaciju.

Rješenje :
Označimo :

$$u(t) = \hat{U} \cos \omega t \leftrightarrow \dot{U} = \hat{U} \angle 0° = \hat{U} e^{j0}$$
$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow \dot{I} = \hat{I} \angle \varphi° = \hat{I} e^{j\varphi}$$

Diferencijalna jednadžba (2) preslikana (transformirana) u frekvencijsko područje uz pomoć pravila za deriviranje (10) i integriranje (11) sada glasi :

$$j\omega L \dot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C} \dot{I} = \dot{U}$$

odnosno :

$$\dot{I} = \frac{\hat{U} \angle 0°}{R + j\,(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

odakle odmah dobivamo iste izraze za amplitudu $\hat{I} = \sqrt{2} I$ i početni kut φ kao i u prethodnom odsječku.

10.4 FUNKCIJE MREŽE

10.4.1 Osnovni pojmovi

- ***Funkcija mreže***.

$$H(j\omega) = \frac{fazor\ \ odziva}{fazor\ \ poticaja} = |H(j\omega)| e^{j\vartheta(\omega)}$$

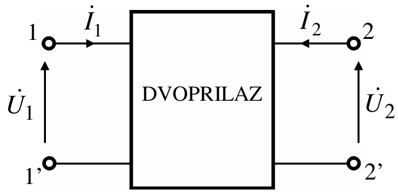
- ***Amplitudna karakteristika***. Grafički prikaz funkcije $|H(j\omega)|$.
- ***Fazna karakteristika***. Grafički prikaz funkcije $\vartheta(\omega)$.
- ***Frekvencijski odziv***. Tvore ga amplitudna i fazna karakteristika prikazane zajedno.
- ***Ulazna funkcija mreže***. Kvocijent dvaju fazora definiranih na *istom paru priključaka* mreže (*istom prilazu*). Postoje dvije ulazne funkcije mreže. To su: ***impedancija*** definirana kvocijentom fazora napona $\dot{U}$ i struje $\dot{I}$ na istom prilazu , tj.

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \qquad (12)$$

i ***admitancija***, definirana kvocijentom fazora struje i napona na istom prilazu .

$$Y(j\omega)=\frac{1}{Z(j\omega)}=\frac{\dot{I}}{\dot{U}} \tag{13}$$

- ***Prijenosna funkcija mreže***. Kvocijent dvaju fazora definiranih na *različitim parovima* priključaka mreže (*različitim prilazima*).



Sl. 10.3 Prikaz dvoprilaza u frekvencijskom području.

Za dvoprilaze kod kojih se prilaz 1 obično smatra prilazom na kojem djeluje poticaj postoje četiri prijenosne funkcije mreže. To su :

a) ***prijenosna impedancija***

$$Z_{21}(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \tag{14}$$

b) ***prijenosni omjer struja***

$$\alpha_{21}(j\omega)=\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \tag{15}$$

c) ***prijenosni omjer napona***

$$A_{21}(j\omega)=\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \tag{16}$$

d) ***prijenosna admitancija***

$$Y_{21}(j\omega)=\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \tag{17}$$

Napomena: Pogledajte u poglavlju 4. osnovne vrste linearnih zavisnih izvora!

10.4.2 Ulazne funkcije mreže za osnovne jednoprilazne elemente mreže

Pretpostavljamo da za napon i struju elementa mreže vrijedi transformacija :

$$u(t) \leftrightarrow \dot{U}$$
$$i(t) \leftrightarrow \dot{I}$$

i da je u svim slučajevima struja $i(t)$ shvaćena kao poticaj.

a) ***Otpor***.
U vremenskom području vrijedi konstitutivna relacija :

$$u=Ri$$

koja nakon fazorske transformacije, koristeći pravilo (9), prelazi u oblik :

$$\dot{U} = R\dot{I}$$

odnosno :

$$H(j\omega)=Z_R(j\omega)=R \; ; \; \left|H(j\omega)\right|=R$$
$$\vartheta(\omega)=0 \tag{18}$$

b) ***Kapacitet***.
U vremenskom području vrijedi konstitutivna relacija :

$$i=C\frac{du}{dt}$$

koja nakon fazorske transformacije , koristeći pravilo deriviranja (10) , prelazi u oblik :

$$\dot{I} = j\omega C\dot{U}$$

odnosno :

$$H(j\omega)=Z_C(j\omega)=\frac{1}{j\omega C} \; ; \; \left|H(j\omega)\right|=\frac{1}{\omega C}$$
$$\vartheta(\omega)=-\frac{\pi}{2} \tag{19}$$

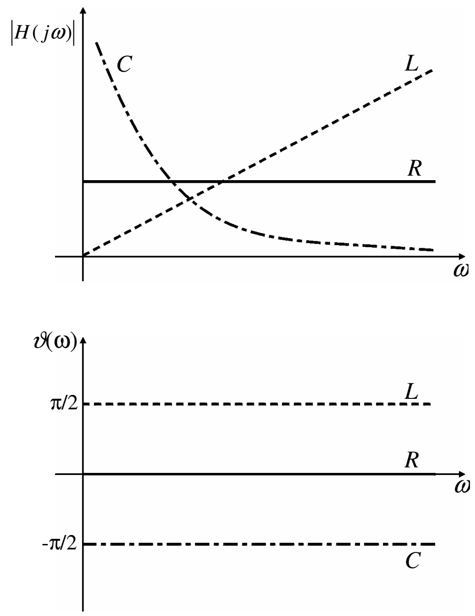
Impedancija $Z_C(j\omega)$ često se naziva i ***kapacitivna reaktancija***.

c) ***Induktivitet***.
U vremenskom području vrijedi konstitutivna relacija:

$$u=L\frac{di}{dt}$$

koja nakon fazorske transformacije, koristeći pravilo deriviranja (10) , prelazi u oblik :

$$\dot{U} = j\omega L\dot{I}$$



Sl. 10.4 Frekvencijski odziv otpora, kapaciteta i induktiviteta.

odnosno :

$$H(j\omega)=Z_L(j\omega)=j\omega L \; ; \; |H(j\omega)|=\omega L$$
$$\vartheta(\omega)=\frac{\pi}{2} \qquad (20)$$

Impedancija $Z_L(j\omega)$ često se naziva i ***induktivna reaktancija***.