XI. PREDAVANJE

Pojam rezonancije. Rezonancijska frekvencija. Fazna rezonancija. Rezonancijske frekvencije serijskog *RLC*-kruga s obzirom na struju kruga i s obzirom na napon na kapacitetu. Fizikalni smisao uvjeta $\omega_r = \omega_0$. Fazni odnos između struje i narinutog napona pri ulasku u rezonanciju. Oštrina rezonancije. Rezonancija kao odziv na jednoharmonijski poticaj. Fizikalnost Fourierovog rastava. Utitravanje u rezonanciju. Pojam filtra. Idealne i realne amplitudne karakteristike osnovnih vrsta filtara : niski propust, visoki propust, pojasni propust, pojasna brana.

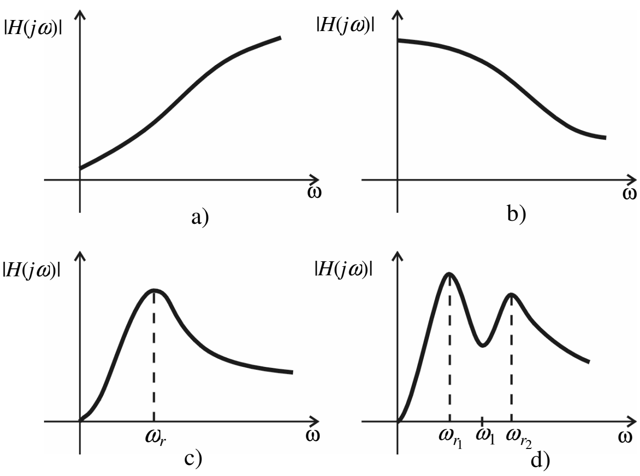
11. REZONANCIJA I FREKVENCIJSKI ODZIV

11.1 POJAM REZONANCIJE (L.I. Mandel'štam, 1930.)

Neka mreža je u ***rezonanciji na frekvenciji*** ω_r ako se pri narinutom harmonijskom poticaju

$$x(t) = \hat{X}\cos\omega t$$

stalne amplitude $\hat{X}$ i *promjenljive* frekvencije u opsegu $0 < \omega < \infty$ postigne na frekvenciji ω_r *najveća moguća amplituda harmonijskog odziva* $\hat{Y}(\omega_r)_M$. Frekvencija ω_r naziva se ***rezonancijska frekvencija.***



Sl. 11.1 Neki tipični oblici amplitudne karakteristike

a) Nema rezonancije. Frekvencija $\omega = \infty$ nije rezonancijska frekvencija.
b) Nema rezonancije. Frekvencija $\omega = 0$ nije rezonancijska frekvencija.
c) Rezonancija na frekvenciji ω_r.
d) Rezonancija na frekvenciji ω_{r1}. Tehnički je važan samo neki konačan opseg frekvencija. Zbog toga i ω_{r2} može biti rezonancijska frekvencija, ako se promatraju frekvencije $\omega > \omega_1$!

Drugim riječima, neka mreža karakterizirana funkcijom mreže

$$H(j\omega) = \frac{\dot{Y}(\omega)}{\dot{X}(\omega)}$$

je u rezonanciji na frekvenciji ω_r ako vrijedi da je

$$\left|H(j\omega_r)\right| = \left|H(j\omega)\right|_M \qquad (1)$$

tj. ako amplitudna karakteristika pripadne funkcije mreže ima za ω_r svoj maksimum.

Napomene:

a) Rezonancija je pojava koja se promatra u ustaljenom stanju. Stanje u nekom trenutku nije bitno, bitan je *proces* koji traje i ne može se reći : Rezonancija je nastupila u trenutku t_0 !
b) U literaturi se spominje i pojam ***antirezonancije***, tj. kad amplitudna karakteristika neke funkcije mreže ima svoj minimum.
c) Rezonancija se često brka s ***faznom rezonancijom***. Fazna rezonancija se pojavljuje pri frekvenciji ω_{rf}, kod koje je početna faza odziva jednaka početnoj fazi poticaja, tj. kad je

$$\Im m\{H(j\omega_{rf})\} = 0 \qquad (2)$$

11.2 REZONANCIJSKE FREKVENCIJE SERIJSKOG *RLC*-KRUGA

Ovisno o postavljenoj zadaći u svakoj se mreži mogu definirati različite funkcije mreže. Zbog toga je očigledno da jedna te ista mreža može imati *više* rezonancijskih frekvencija. Pokažimo to na primjeru serijskog *RLC*-kruga, slika 10.1.

U svim slučajevima smatrat ćemo *napon* $u = \hat{U}\cos\omega t$ naponskog izvora poticajem a kao odziv promatrat ćemo ili *struju kruga* $i(t)$ ili *napon na kapacitetu* $u_C(t)$. Umjesto odgovarajućih funkcija mreže, admitancije

$$Y(j\omega) = \frac{\dot{I}}{\dot{U}}$$

odnosno prijenosnog omjera napona

$$A_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}}$$

iskazat ćemo rezonancijske frekvencije s obzirom na varijable odziva struju i napon na kapacitetu.

11.2.1 Amplituda struje $\hat{I}(\omega)$ kao varijabla odziva

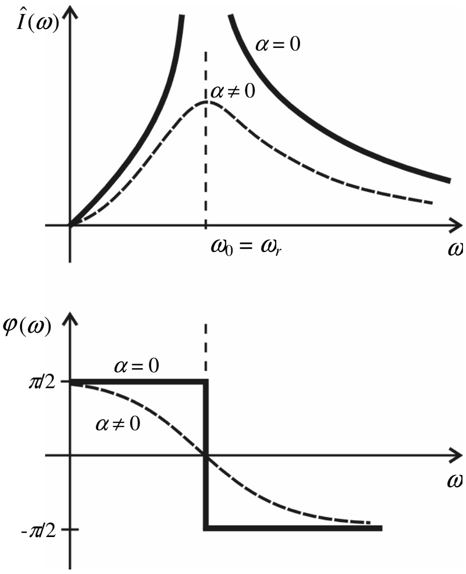
Ako se u izraze (10.5) i (10.6) umjesto parametara R, L i C uvedu faktor gušenja α i vlastita frekvencija ω_0, dobivamo odmah i amplitudnu i faznu karakteristiku

$$\hat{I}(\omega)=\frac{\hat{U}}{L}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0{}^2-\omega^2}{\omega}\right)^2+4\alpha^2}} \tag{3}$$

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{\omega_0{}^2-\omega^2}{2\alpha\omega}$$

Napomena :
Do istih se rezultata može doći i koristeći izraze (9.10) iz odsječka 9.2.1 ako znamo da je zbog $i = dq / dt$

$$\hat{I}(\omega)=\omega\hat{Q}(\omega) \quad ; \quad \varphi=\frac{\pi}{2}-\psi$$



Sl. 11.2 Kvalitativni prikaz frekvencijskog odziva struje serijskog RLC-kruga za dvije vrijednosti faktora gušenja.

Iz amplitudne karakteristike $\hat{I}(\omega)$, izraz (3), lako se vidi da je rezonancija postignuta kad je

$$\omega_r = \omega_0 \tag{4}$$

Vrijednost struje tada je najveća i iznosi

$$\hat{I}(\omega_r)=\hat{I}_M=\frac{\hat{U}}{L\cdot 2\alpha}=\frac{\hat{U}}{R} \tag{5}$$

Fizikalni smisao uvjeta $\omega_r = \omega_0$ postaje jasniji ako se izračuna ukupna elektromagnetska energija u krugu,

$$\mathscr{E}_\Sigma(t)=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}Cu_C{}^2$$

S obzirom na to da promatramo ustaljeno stanje smije se napon na kapacitetu odrediti iz izraza

$$u_C=\frac{1}{C}\int idt=\frac{1}{C}\int\hat{I}\cos(\omega t+\varphi)dt=\frac{\hat{I}}{\omega C}\sin(\omega t+\varphi) \tag{6}$$

te dobivamo da je

$$\mathscr{E}_\Sigma(t)=\frac{1}{2}L\hat{I}^2\cos^2(\omega t+\varphi)+\frac{1}{2\omega^2C}\hat{I}^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

Kako je

$$\mathscr{E}_\Sigma = \mathscr{E}_\Sigma(t) \neq konst.$$

znači da za cijelo vrijeme procesa postoji *prijenos energije iz vanjskog svijeta* (izvora) u krug i obratno. No, ako je

$$\frac{1}{2}L\hat{I}^2=\frac{1}{2\omega^2C}\hat{I}\Rightarrow\omega^2=\frac{1}{LC}=\omega_0{}^2$$

bit će

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\Sigma&=\frac{1}{2}L\hat{I}^2\left[\cos^2(\omega_0t+\varphi)+\sin^2(\omega_0t+\varphi)\right]=\\&=\frac{1}{2}L\hat{I}^2=konst.\end{aligned}$$

što znači da pri *rezonanciji struje*, tj. kad je $\omega_r=\omega_0$, postoji prijenos energije iz vanjskog svijeta u krug, ali ne i obratan proces. Uskladištena energija u iznosu

$$\frac{1}{2}L\hat{I}^2$$

dovoljna je za održavanje titranja, a iz vanjskog svijeta se samo nadoknađuju gubici ! To je i fizikalno objašnjenje izraza (5).

Pitanje :
Zašto se za vrijeme ulaska u rezonanciju *mijenja fazni odnos* između struje i narinutog napona kao što to pokazuje fazna karakteristika , sl. 11.2 ?

Naime , iz izraza (3) proizlazi

$$\begin{aligned}\hat{I}(\omega)&=\frac{\omega\hat{U}}{L\cdot 2\alpha\omega\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{2\alpha\omega}\right)^2+1}}=\\&=\frac{\hat{U}}{R}\frac{1}{\sqrt{tg^2\varphi+1}}=\frac{\hat{U}}{R}\cos\varphi\end{aligned} \tag{7}$$

U fizikalnom objašnjenju polazimo od diferencijalne jednadžbe kruga (10.2) koja nakon množenja sa strujom $i(t)$ i usrednjavanjem na periodu $T=2\pi/\omega$ daje jednakost

$$R\int_0^T i^2dt=\hat{U}\int_0^T i\cos\omega t dt \tag{8}$$

tj. energija pretvorena u toplinu u krugu mora biti jednaka energiji preuzetoj iz vanjskog svijeta (izvora).

Kako je $\hat{U}$ = konst., a postupno ulazimo u rezonanciju, povećavat će se struja $i(t)$ po amplitudi, ali će se zbog toga vrijednost integrala

$$\int_0^T i^2 dt$$

povećavati neusporedivo brže ! Jednadžba (8) može ostati točna samo ako se mijenja fazni odnos između struje $i = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$ i narinutog napona $u = \hat{U}\cos\omega t$. Iz (8) proizlazi

$$R\int_0^T \hat{I}^2\cos^2(\omega t+\varphi)dt = \hat{U}\hat{I}\int_0^T \cos(\omega t+\varphi)\cos\omega t dt$$

No,

$$\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)dt = \frac{T}{2} \quad ;$$

$$\int_0^T \cos(\omega t+\varphi)\cos\omega t dt = \frac{T}{2}\cos\varphi$$

pa vrijedi

$$R\hat{I}^2 = \hat{U}\hat{I}\cos\varphi$$

odakle neposredno proizlazi istinitost izraza (7). Prijelazom na efektivne vrijednosti ova jednakost poprima oblik

$$RI^2 = UI\cos\varphi$$

što je poznata relacija iz Osnova elektrotehnike za djelatnu snagu u izmjeničnom krugu .

11.2.2 Amplituda napona na kapacitetu $\hat{U}_C(\omega)$ kao varijabla odziva

Iz (6) proizlazi da je

$$\hat{U}_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}\hat{I}(\omega) = \hat{U}\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\alpha^2\omega^2}} \qquad (9)$$

Rezonancijska frekvencija ω'_r s obzirom na napon kapaciteta dobiva se iz uvjeta

$$\frac{d\hat{U}_C(\omega)}{d\omega} = 0$$

i iznosi :

$$\omega'_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \qquad (10)$$

što uvršteno u (9) daje najveću moguću vrijednost amplitude napona na kapacitetu

$$\hat{U}_C(\omega'_r) = \hat{U}_{C,M} = \frac{\hat{U}}{2\alpha}\cdot\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}} \qquad (11)$$

11.2.3 Rezonancijske frekvencije kruga ako se mijenja vlastita frekvencija ω_0

U praksi je čest slučaj da je frekvencija poticaja ω stalna, a mijenja se vlastita frekvencija ω_0.

a) Iz uvjeta

$$\frac{d\hat{I}(\omega_0)}{d\omega_0} = 0$$

proizlazi za *rezonancijsku frekvenciju s obzirom na struju* ω_{0r} da je

$$\omega_{0r} = \omega \quad ; \quad \hat{I}(\omega_{0r}) = \frac{\hat{U}}{R} \qquad (12)$$

b) Iz uvjeta

$$\frac{d\hat{U}_C(\omega_0)}{d\omega_0} = 0$$

proizlazi za *rezonancijsku frekvenciju s obzirom na napon na kapacitetu* ω'_{0r} da je

$$\omega'_{0r} = \sqrt{\omega^2 + 4\alpha^2} \quad ; \qquad (13a)$$

odnosno

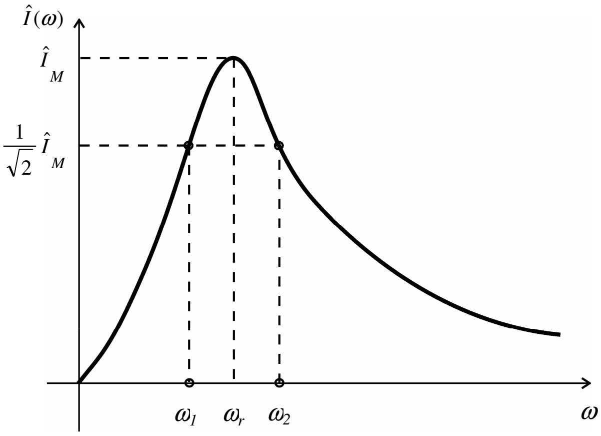
$$\hat{U}_C(\omega'_{0r}) = \hat{U}\cdot\frac{\omega'_{0r}}{2\alpha} \qquad (13b)$$

11.3 OŠTRINA REZONANCIJE

Pod *oštrinom rezonancije* smatra se *širina pojasa frekvencije B* unutar kojeg amplituda odziva nije manja od $1/\sqrt{2}$ puta vrijednosti amplitude odziva u rezonancijskoj točki, sl. 11.3.

Što je rezonancija oštrija to je uža širina pojasa B,

$$B = \omega_2 - \omega_1$$



Sl.11.3.Karakteristične veličine na amplitudnoj karakteristici struje serijskog *RLC*-kruga; $B=\omega_2-\omega_1=2\alpha$.

11.4 REZONANCIJA JE ODZIV NA JEDNOHARMONIJSKI POTICAJ

Česta je zabluda da rezonancija nastupa uvijek kada se *podudare* perioda poticaja $T=2\pi/\omega$ i perioda $T_r=2\pi/\omega_r$ koja odgovara rezonancijskoj frekvenciji. Primjerice, neka se na neki krug narinu u dva slučaja dva poticaja

a) poticaj oblika $u_1 = A_2 \sin 2\omega_r t + A_3 \sin 3\omega_r t$

b) poticaj oblika $u_2 = A_1 \sin \omega_r t$

Oba poticaja imaju istu periodu $T_r=2\pi/\omega_r$. No, rezonancija će nastupiti samo u drugom slučaju.

Rezonancija je odziv na jednoharmonijski poticaj, a ne na opći periodički poticaj. Ako na neku mrežu djeluje periodična elektromotorna sila periode jednake $T_r=2\pi/\omega_r$, a u toj elektromotornoj sili (njenom Fouriereovom rastavu) *nema harmonijskog člana potrebne frekvencije* ω_r, rezonancije neće biti!

Pokažimo to na primjeru struje serijskog *RLC*- kruga kad na njega djeluje višeharmonijski naponski izvor. Vrijedi

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int i dt = \sum_{n=1}^{N}\hat{U}(n)\cos(n\omega t+\psi_n)$$

Budući da je krug linearan i vremenski nepromjenljiv i rješenje će se sastojati od sume harmonijskih funkcija, tj.

$$i=\sum_{n=1}^{N}\hat{I}(n)\cos(n\omega t+\psi_n+\varphi_n)$$

gdje je amplituda *n*-tog harmonijskog člana dana izrazom

$$\hat{I}(n)=\frac{\hat{U}(n)}{L}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-n^2\omega^2}{n\omega}\right)^2+4\alpha^2}}$$

i očigledno je da je za frekvenciju $n\omega$ moguća rezonancija, ali samo ako postoji odgovarajući poticaj $\hat{U}(n)$ na toj frekvenciji.

Napomena :
Iako se periodične funkcije mogu rastaviti na razne načine, sa stajališta rezonancijskih pojava, samo *Fourierov rastav jest fizikalan*, tj. daje ispravne odgovore.

11.5 UTITRAVANJE U REZONANCIJU

Odredimo prijelaznu pojavu utitravanja u rezonanciju na primjeru serijskog *RLC*-kruga. Vrijedi diferencijalna jednadžba (9.9), tj.

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\alpha\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\frac{\hat{U}}{L}\cos\omega t \tag{14}$$

Pretpostavimo da je : $\alpha << \omega_0$; $\omega \approx \omega_0$; q(+0)=0; $\frac{dq}{dt}(+0)=0$. Tada je prema odsječku 9.2.1 rješenje dano izrazom

$$q=e^{-\alpha t}\left(K_1\cos\omega_d t+K_2\sin\omega_d t\right)+\hat{Q}\cos(\omega t-\psi)$$

Uzevši u obzir zadane početne uvjete i pretpostavke bit će

$$\omega_d\approx\omega_0;\ K_1\approx-\hat{Q};\ K_2\approx 0;\ \psi\approx 0$$

te dobivamo za potpuni odziv kruga izraz

$$q\approx\left(1-e^{-\alpha t}\right)\hat{Q}\cos\omega_0 t \tag{15}$$

Zaključujemo :
Što je rezonancija oštrija (manji α), to ona kasnije nastupa!

Granični slučaj : R=0.
Tada je $\alpha=0$, $\omega=\omega_0$, a diferencijalna jednadžba (14) je oblika

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2q=\frac{\hat{U}}{L}\cos\omega_0 t$$

rješenje koje je

$$q=K_1\cos\omega_0 t+K_2\sin\omega_0 t-\frac{\hat{U}}{2\omega_0 L}t\sin\omega_0 t$$

Dobivamo *neograničeni porast* odziva. Strogo govoreći, u krugu bez gubitaka utitravanje traje beskonačno dugo, te je besmisleno govoriti o rezonanciji budući da nema ustaljenog stanja. Unatoč tome se i kod krugova bez gubitaka govori o rezonanciji. Razlog je u tome što je krug bez gubitaka previsoki stupanj idealizacije pri modeliranju stvarnih linearnih vremenski nepromjenljivih mreža.

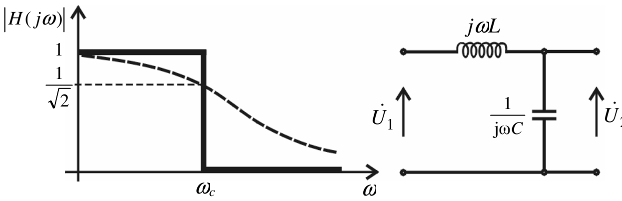
11.6 FILTRI

Filtar je frekvencijski selektivan dvoprilaz definiran funkcijom mreže

$$H(j\omega)=\frac{\text{fazor izlaznog signala}}{\text{fazor ulaznog signala}}=\text{prijenosna funkcija mreže}$$

Za karakterizaciju filtra najčešće se koriste prijenosni omjeri napona $A_{21}(j\omega)$ ili struje $\alpha_{21}(j\omega)$.

11.6.1 *Niski propust*



a) b)

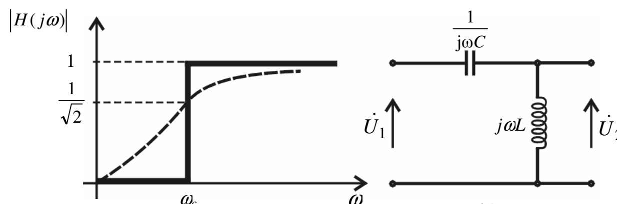
$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{1}{1-\overline{\omega}^2}$$

Sl. 11.4 a) Idealna (—) i realna (---) amplitudna karakteristika niskog propusta.
b) Primjer reaktivnog niskog propusta $\overline{\omega}=\omega/\omega_0$.

Granična frekvencija ω_c (cut-off-frequency) definirana je izrazom

$$\left|H(j\omega_c)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|H(j0)\right|$$

11.6.2 *Visoki propust*



a) b)

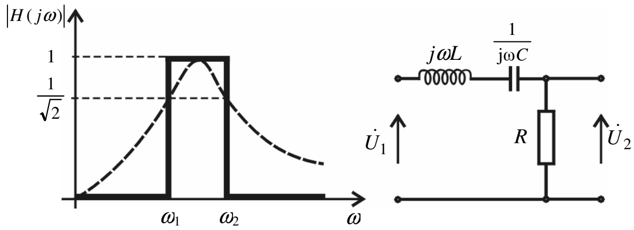
$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2-1}$$

Sl. 11.5 a) Idealna (—) i realna (---) amplitudna karakteristika visokog propusta.
b) Primjer reaktivnog visokog propusta $\overline{\omega}=\omega/\omega_0$.

Granična frekvencija ω_c dana je izrazom

$$\left|H(j\omega_c)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|H(j\infty)\right|$$

11.6.3 *Pojasni propust*

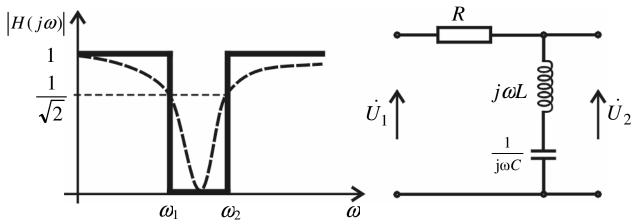


a) b)

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\dfrac{2\alpha}{\omega_0}\overline{\omega}}{\dfrac{2\alpha}{\omega_0}\overline{\omega}+j(\overline{\omega}^2-1)}$$

Sl. 11.6 a) Idealna (—) i realna (---) amplitudna karakteristika pojasnog propusta
b) Primjer reaktivnog pojasnog propusta, $\overline{\omega}=\omega/\omega_0$.

11.6.4 *Pojasna brana*



a) b)

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}=\frac{\overline{\omega}^2-1}{\overline{\omega}^2-1-j\dfrac{2\alpha}{\omega_0}\overline{\omega}}$$

Sl. 11.7 a) Idealna (—) i realna (---) amplitudna karakteristika pojasne brane.
b) Primjer reaktivne pojasne brane, $\overline{\omega}=\omega/\omega_0$.