XII. PREDAVANJE

Trenutna i srednja uskladištena energija induktiviteta i kapaciteta. Jalova snaga induktiviteta i kapaciteta. Srednja (djelatna) snaga otpora. Prividna i jalova snaga izvora. Fizikalni smisao jalove i prividne snage jednoprilaza. Pojam kompleksne snage. Zakon o očuvanju kompleksne snage. Zakon o očuvanju jalove snage. Kirchhoffovi zakoni za fazore. Impedancija serijskog *RLC*-kruga. Formalna sličnost izraza za impedanciju općeg jednoprilaza s izrazom za impedanciju serijskog *RLC*-kruga. Važnost fazne rezonancije.

12. ENERGETSKI ODNOSI

Na primjeru serijskog *RLC*-kruga objasnit će se energetski odnosi u mrežama s *pozitivnim linearnim vremenski nepromjenljivim elementima* u sinusoidalnom ustaljenom stanju. Iz prethodnih poglavlja znamo da ako se na ovaj krug narine napon valnog oblika

$$u = \hat{U}\cos\omega t$$

da će struja u ustaljenom stanju biti

$$i = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi)$$

gdje je

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{1}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

12.1 SNAGA I ENERGIJA ELEMENATA LINEARNE VREMENSKI NEPROMJENLJIVE MREŽE

12.1.1 Induktivitet

- *Trenutna uskladištena energija*

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_L(t) &= \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\hat{I}^2\cos^2(\omega t+\varphi) = \\ &= \frac{1}{4}L\hat{I}^2\left[1+\cos 2(\omega t+\varphi)\right] \geq 0\end{aligned} \tag{2}$$

- *Srednja uskladištena energija*

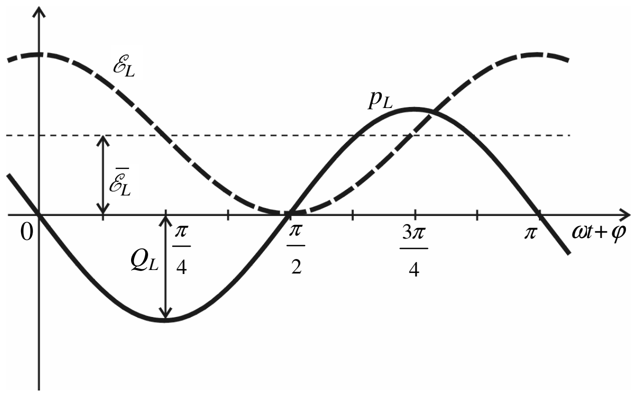
$$\overline{\mathscr{E}_L} = \frac{1}{4}L\hat{I}^2 \tag{3}$$

- *Snaga* koju induktivitet preuzima iz mreže

$$\begin{aligned}p_L(t) &= \frac{d\mathscr{E}_L}{dt} = -\frac{1}{2}\omega L\hat{I}^2\sin 2(\omega t+\varphi) = \\ &= -Q_L\sin 2(\omega t+\varphi) \gtreqless 0\end{aligned} \tag{4}$$

- ***Jalova snaga***. *Amplituda* trenutne snage i mjera za *dimenzije* fizički izvedenog induktiviteta (prigušnice).

$$Q_L = \frac{1}{2}\omega L\hat{I}^2 = \omega L I^2 = 2\omega\overline{\mathscr{E}_L} \tag{5}$$



Sl. 12.1 Valni oblici trenutne uskladištene energije $\mathscr{E}_L$ i snage p_L induktiviteta.

12.1.2 Kapacitet

- *Trenutna uskladištena energija*
  Budući da je

$$q = \int i\,dt = \int \hat{I}\cos(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{\hat{I}}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$$

to proizlazi da je trenutna uskladištena energija dana izrazom

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_C(t) &= \frac{1}{2C}q^2 = \frac{\hat{I}^2}{2\omega^2 C}\sin^2(\omega t+\varphi) = \\ &= \frac{\hat{I}^2}{4\omega^2 C}\left[1-\cos 2(\omega t+\varphi)\right] \geq 0\end{aligned} \tag{6}$$

- *Srednja uskladištena energija*

$$\overline{\mathscr{E}}_C = \frac{\hat{I}^2}{4\omega^2 C} = \frac{1}{4} C \hat{U}_C^2 \tag{7}$$

gdje je $\hat{U}_C$ amplituda napona na kapacitetu.

- *Snaga* koju kapacitet preuzima iz mreže

$$\begin{aligned} p_C(t) &= \frac{d\mathscr{E}_C}{dt} = \frac{\hat{I}^2}{2\omega C}\sin 2(\omega t+\varphi) = \\ &= Q_C \sin 2(\omega t+\varphi) \gtreqless 0 \end{aligned} \tag{8}$$

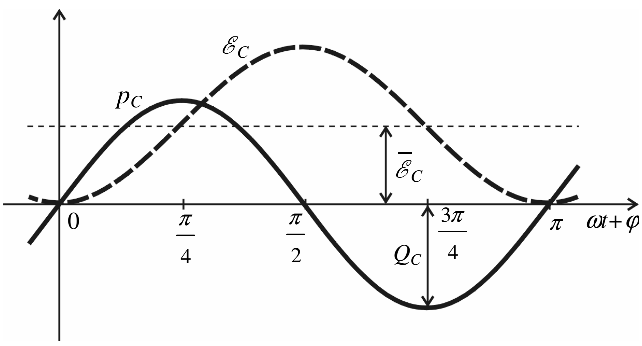
Važno je uočiti da su $p_C(t)$ i $p_L(t)$ *uvijek suprotnog predznaka.* Kad se kapacitet ponaša kao izvor , tj. kad je $p_C(t) < 0$, induktivitet se ponaša kao trošilo, tj. $p_L(t) > 0$, i obratno.

- ***Jalova snaga***

$$Q_C = \frac{\hat{I}^2}{2\omega C} = \frac{1}{2}\omega C \hat{U}_C^2 = \omega C U_C^2 = 2\omega \overline{\mathscr{E}}_C \tag{9}$$

gdje je U_C efektivna vrijednost napona na kapacitetu.

Kao i kod induktiviteta jalova snaga je *amplituda* trenutne snage a time i mjera za *dimenzije* fizički izvedenog kapaciteta (kondenzatora).



Sl. 12.2 Valni oblici trenutne uskladištene energije $\mathscr{E}_C$ i snage p_C kapaciteta.

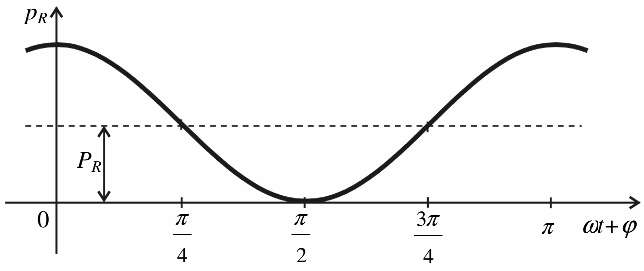
12.1.3 Otpor

- *Snaga* koju otpor preuzima iz mreže

$$\begin{aligned} p_R(t) &= Ri^2 = R\hat{I}^2\cos^2(\omega t+\varphi) = \\ &= \frac{1}{2}R\hat{I}^2\left[1+\cos 2(\omega t+\varphi)\right] \geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

- *Srednja (djelatna) snaga*

$$P_R = \frac{1}{2}R\hat{I}^2 = RI^2 \tag{11}$$



Sl. 12.3 Valni oblik trenutne snage otpora..

12.1.4 Naponski izvor

- *Snaga* koju izvor daje pasivnim elementima mreže

$$\begin{aligned} ui &= Ri^2 + p_L(t) + p_C(t) = P_R\left[1+\cos 2(\omega t+\varphi)\right] - \\ &- (Q_L - Q_C)\sin 2(\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

Budući da je prema (1), odnosno (5) i (9)

$$\mathrm{tg}\varphi = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{Q_L - Q_C}{P_R} \tag{12}$$

izraz za trenutnu snagu može se napisati u zbijenijem obliku kao

$$p(t) = u(t)\cdot i(t) = P_R + S\cos(2\omega t+\varphi) \tag{13}$$

gdje je sa S označena amplituda izmjeničnog dijela trenutne snage i naziva se ***prividna snaga*** izvora,

$$S = \sqrt{P_R^2 + (Q_L - Q_C)^2} \tag{14}$$

a član

$$Q = Q_L - Q_C \tag{15}$$

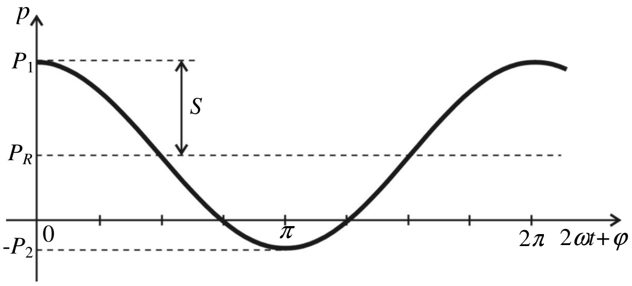
naziva se ***jalova snaga*** izvora. Kvocijent

$$\frac{P_R}{S} = \frac{P_R}{\sqrt{P_R^2 + (Q_L - Q_C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \cos\varphi \tag{16}$$

naziva se ***faktor snage.***

Ako je poznata pozitivna amplituda P_1 i negativna amplituda P_2 trenutne snage, lako se uočava, u skladu sa slikom 12.4, da je

$$S = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \quad ; \quad P_R = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)$$



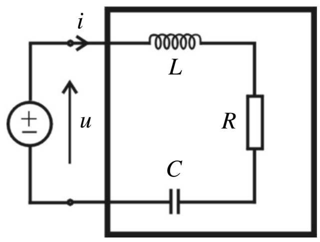
Sl. 12.4 Valni oblik trenutne snage izvora.

a jalova snaga izvora je prema izrazu (14) jednaka

$$Q = \sqrt{S^2 - P_R^2} = \sqrt{P_1 P_2}$$

12.2 FIZIKALNI SMISAO JALOVE I PRIVIDNE SNAGE JEDNOPRILAZA

Umjesto termina jalova i prividna snaga izvora možemo, ako serijski *RLC*-krug shvatimo kao jednoprilaz, sl. 12.5, upotrebljavati i termine *jalova i prividna snaga jednoprilaza.*



Sl. 12.5 Serijski *RLC* – krug shvaćen kao jednoprilaz.

Ukupna uskladištena elektromagnetska energija u promatranom jednoprilazu jednaka je

$$\mathscr{E}_\Sigma(t) = \mathscr{E}_L(t) + \mathscr{E}_C(t) = \overline{\mathscr{E}_L} + \overline{\mathscr{E}_C} + (\overline{\mathscr{E}_L} - \overline{\mathscr{E}_C})\cos 2(\omega t+\varphi)$$

No, uzevši u obzir izraze (5), (9) i definiciju jalove snage (15), ukupna elektromagnetska energija može se izraziti u obliku

$$\mathscr{E}_\Sigma(t) = \overline{\mathscr{E}_L} + \overline{\mathscr{E}_C} + \frac{Q}{2\omega}\cos 2(\omega t + \varphi) \tag{17}$$

Fizikalni smisao pojma jalove snage postaje očit. Jalova snaga je *mjera za količinu energije koja njiše između izvora i pasivnog jednoprilaza* i ne sudjeluje u pretvorbi električne energije izvora u drugi oblik.

Jalova snaga je *jednaka nuli,* ako
a) u jednoprilazu *nema* reaktivnih elemenata, ili ako je
b) $Q_L = Q_C$, tj. $\overline{\mathscr{E}_L} = \overline{\mathscr{E}_C}$, a to je uvjet *rezonancije struje* (odsječak 11.2.1).

Prividna snaga je u skladu sa (14) definirana izrazom

$$S = \sqrt{P_R^2 + Q^2} \tag{18}$$

i poteškoću u fizikalnoj interpretaciji ovog izraza mogla bi predstavljati činjenica da su srednja (djelatna) snaga i jalova snaga Q različitog karaktera. Naime P_R je *srednja vrijednost,* a Q je *amplituda*! Iz (18) proizlazi definicija prividne snage:

Prividna snaga je najveća moguća djelatna snaga koju bi jednoprilaz *mogao* preuzeti iz izvora pri danim efektivnim vrijednostima napona *U* i struje *I* jednoprilaza.

Dakle:

$$S = P_{R,M} \tag{19}$$

Ovo je ostvarivo ako je $\cos\varphi = 1$, tj. iz

$$P_R = \frac{1}{2} R\hat{I}^2$$

zbog $\hat{U} = R\hat{I}$ proizlazi da je

$$P_{R,M} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}}{\hat{I}}\right)\cdot \hat{I}^2 = \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I} = U\cdot I = S \tag{20}$$

12.3 ZAKON O OČUVANJU KOMPLEKSNE SNAGE

Prividna snaga, posve formalno, može se shvatiti kao modul tzv. *kompleksne snage,* tj.

$$\dot{S} = P_R + jQ$$

Budući da je prema (12) i (16)

$$\cos\varphi = \frac{P_R}{S} \quad ; \quad \sin\varphi = -\frac{Q}{S}$$

vrijedit će da je

$$\dot{S} = S\cos\varphi + j(-S\sin\varphi) = S(\cos\varphi - j\sin\varphi) = Se^{-j\varphi}$$

a ovo je moguće samo ako je

$$\dot{S} = \frac{1}{2}\dot{U}\cdot\dot{I}^* \tag{21}$$

gdje je $\dot{I}^*$ konjugirano kompleksni fazor od $\dot{I} = \hat{I}e^{j\varphi}$

Napomena: Kompleksna snaga $\dot{S}$ samo je drugi oblik zapisa prividne snage. Fizikalni smisao nema, dok ga njen modul (prividna snaga) ima! Unatoč tome ovaj je pojam važan u tehnici. Pokazat ćemo da za kompleksne snage u mreži vrijedi zakon o očuvanju, dok za prividne snage on ne vrijedi.

U poglavlju 1 pokazano je da ako u nekoj mreži vrijede Kirchhoffovi zakoni da tada u toj mreži vrijedi i zakon o očuvanju energije. Ovo je posljedica važenja Tellegenovog teorema. Pokažimo da taj teorem vrijedi i za fazore. Analogno dokazu u poglavlju 1 i ovdje će biti dovoljno samo dokazati da Kirchhoffovi zakoni vrijede i za fazore.

KZS izriče da u mreži koja se sastoji od b grana i n čvorova vrijedi da je

$$\sum_{k=1}^{b} a_{jk} i_k = 0 \quad , \text{za } j - \text{ti čvor} \tag{22}$$

Na, u ustaljenom stanju na frekvenciji ω može se za struju svake k-te grane definirati fazor

$$\dot{I}_k = \hat{I}_k e^{j\varphi_k}$$

koji predočava jednoharmonijsku funkciju struje

$$i_k = \Re e\left\{\dot{I}_k e^{j\omega t}\right\} \tag{23}$$

Uvrstimo li (23) u (22) i budući da znamo da je operator $\Re e\{...\}$ *linearan* možemo napisati da je

$$\sum_{k=1}^{b} a_{jk} \dot{I}_k = 0 \tag{24}$$

Dobili smo Kirchhoffov zakon struje za fazore. Budući da je pretvorba kompleksnog broja u konjugirano kompleksni linearna transformacija, to će vrijediti i

$$\sum_{k=1}^{b} a_{jk} \dot{I}_k^* = 0 \tag{25}$$

Na posve analogni način proizlazi na temelju KZN-a

$$\sum_{k=1}^{b} b_{jk} u_k = 0 \quad , \text{za } j\text{-tu petlju}$$

i da vrijedi Kirchhoffov zakon napona za fazore, tj.

$$\sum_{k=1}^{b} b_{jk} \dot{U}_k = 0 \tag{26}$$

Na osnovi izraza (25) i (26), koristeći Tellegenov teorem dobivamo da je

$$\sum_{k=1}^{b} \frac{1}{2} \dot{U}_k \dot{I}_k^* = \sum_{k=1}^{b} \dot{S}_k = 0 \tag{27}$$

dakle, da je u svakoj linearnoj vremenski nepromjenljivoj mreži u kojoj djeluju izvori na samo jednoj frekvenciji ω ***očuvana kompleksna snaga.***

Budući da se kompleksna snaga svake grane može napisati kao $\dot{S}_k = P_k + jQ_k$, prema (27) vrijedi da je

$$\sum_{k=1}^{b} (P_k + jQ_k) = 0$$

što je moguće samo ako je

$$\sum_{k=1}^{b} P_k = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{b} Q_k = 0 \tag{28}$$

tj. da vrijedi ***zakon o očuvanju srednje (djelatne) snage,*** što nam je poznato još iz poglavlja 1, ali i da vrijedi ***zakon o očuvanju jalove snage.***

Ovo znači da ako neki element mreže *preuzima* određenu količinu jalove snage, da tu istu količinu jalove snage moraju *proizvesti* ili izvori ili drugi reaktivni elementi mreže. Ova činjenica jest ključ u razumijevanju postupaka ***kompenzacije faktora snage*** u elektroenergetskim mrežama.

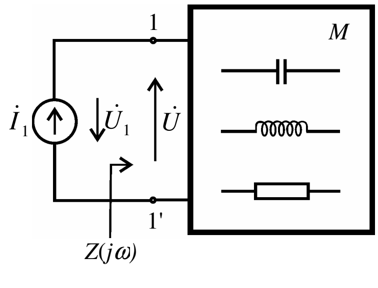
12.4 IMPEDANCIJA JEDNOPRILAZA (H.W. Bode, 1945.)

Impedancija jednoprilaza danog na slici 12.5 jednaka je

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] \frac{\frac{1}{2}\hat{I}^2}{\frac{1}{2}\hat{I}^2} = \\ &= \frac{2P_R + j4\omega\left(\overline{\mathscr{E}_L} - \overline{\mathscr{E}_C}\right)}{\hat{I}^2} \end{aligned} \tag{29}$$

Pokažimo da formalno isti izraz za impedanciju dobivamo za *bilo koji jednoprilaz* sastavljen od linearnih vremenski nepromjenljivih otpora, induktiviteta i kapaciteta. Za opći jednoprilaz prikazan na slici 12.6, uz pretpostavku da se u svakoj grani mreže nalazi po jedan element, za k-tu granu vrijedi da je

$$\dot{U}_k = Z_k(j\omega)\dot{I}_k$$



Sl. 12.6 K analizi impedancije općeg jednoprilaza.

Ako sa $Z(j\omega)$ označimo impedanciju općeg jednoprilaza, onda sigurno u skladu sa KZN vrijedi :

$$\dot{U}_1 + \dot{U} = 0 \;\; ; \;\; \dot{U} = Z(j\omega)\dot{I}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_1 = -Z(j\omega)\dot{I}_1$$

Zakon o očuvanju kompleksne snage jamči da je

$$\frac{1}{2}\dot{U}_1\dot{I}_1^* + \sum_{k=2}^{b}\frac{1}{2}\dot{U}_k\dot{I}_k^* = 0$$

odnosno

$$-\frac{1}{2}Z(j\omega)\hat{I}_1^2 + \sum_{k=2}^{b}\frac{1}{2}Z_k(j\omega)\hat{I}_k^2 = 0$$

Grupiraju li se posebno otpori, kapaciteti i induktiviteti, proizlazi da je

$$\frac{1}{2}Z(j\omega)\hat{I}_1^2 = \sum_{k\in R}\frac{1}{2}R_k\hat{I}_k^2 + \sum_{k\in L}\frac{1}{2}j\omega L_k\hat{I}_k^2 + \\ + \sum_{k\in C}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j\omega C_k}\hat{I}_k^2$$

Prvi član na desnoj strani daje ukupnu djelatnu snagu disipiranu u otporima mreže *M*, tj.

$$P = \sum_{k\in R}\frac{1}{2}R_k\hat{I}_k^2$$

Drugi član zbroja daje ukupnu jalovu snagu induktiviteta

$$Q_L' = \sum_{k\in L}\frac{1}{2}\omega L_k\hat{I}_k^2 = 2\omega\overline{\mathscr{E}_L}'$$

gdje je sa $\overline{\mathscr{E}_L}'$ označena srednja magnetska energija uskladištena u svim induktivitetima mreže *M*. Treći član daje ukupnu jalovu snagu kapaciteta

$$Q_C' = \sum_{k\in C}\frac{1}{2\omega C_k}\hat{I}_k^2 = 2\omega\overline{\mathscr{E}_C}'$$

gdje je sa $\overline{\mathscr{E}_C}'$ označena srednja elektrostatička energija uskladištena u svim kapacitetima mreže *M*. Proizlazi

$$Z(j\omega) = \frac{2P + j4\omega(\overline{\mathscr{E}_L}' - \overline{\mathscr{E}_C}')}{\hat{I}_1^2} \qquad (30)$$

dakle formalno isti izraz kao i za impedanciju serijskog *RLC*-kruga.

VAŽNO :
Kako je $P \geq 0$ proizlazi da je

$$\Re e\{Z(j\omega)\} \geq 0 \;\; , \;\; \Im m\{Z(j\omega)\} \gtreqless 0 \;\; ; \; \forall\omega \qquad (31)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sphericalangle Z(j\omega) \leq \frac{\pi}{2} \qquad (32)$$

Napomene :

a) U serijskom *RLC*-krugu *fazna rezonancija* nastupa kad je $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, tj. kad je $\overline{\mathscr{E}_L} = \overline{\mathscr{E}_C}$

b) U jednoprilazu *složenosti po volji* fazna rezonancija nastupa pod istim uvjetima, tj. kad je $\overline{\mathscr{E}_L}' = \overline{\mathscr{E}_C}'$

c) Prikaz impedancije jednoprilaza izrazom (30) posebno je prikladan za sva istraživanja impedancijskih karakteristika u okolišu točke fazne rezonancije. Tako primjerice ako je $\overline{\mathscr{E}_L}' \neq \overline{\mathscr{E}_C}'$, ali je razlika $\left|\overline{\mathscr{E}_L}' - \overline{\mathscr{E}_C}'\right|$ mala u odnosu na $\overline{\mathscr{E}_L}'$ odnosno na $\overline{\mathscr{E}_C}'$, tada smo sigurni da smo u *okolišu točke fazne rezonancije.* Ako je istodobno $\frac{P}{\omega}$ malen u odnosu prema $\overline{\mathscr{E}_L}'$ odnosno $\overline{\mathscr{E}_C}'$, tada se sigurno nalazimo u blizini *maksimuma amplitudnih karakteristika.* (Uočimo da se pri $\alpha \ll \omega_0$ fazna rezonancija podudara s “pravim” rezonancijama, poglavlje 11.2).