XIII. PREDAVANJE

Pojam višeharmonijske mreže. Vrste višeharmonijskih mreža. Linearne višeharmonijske mreže. Metoda fazorske transformacije. Nadomjesne sheme spoja za *n*-ti harmonijski član. Analiza u vremenskom području. Uvjeti periodičnosti. Uvjeti neprekinutosti varijabli. Mreže linearne po odsječcima. Postupak rješavanja. Određivanje tipa periodičkog rješenja. Primjer sklopa sa dvije idealne diode. Sklopovi s periodički upravljanim sklopkama kao primjer sklopova s unaprijed zadanim tipom periodičkog rješenja. Realizacija otpora s pomoću sklopkama preklapanog kapaciteta.

IV. NESINUSOIDALNO USTALJENO STANJE

Analiza sinusoidalnog ustaljenog stanja pretpostavlja stabilnu mrežu sastavljenu od linearnih vremenski nepromjenljivih elemenata u kojoj djeluje jednoharmonijski poticaj. Elektroenergetske mreže su karakterističan primjer stvarnih mreža kod kojih se niz zadaća analize može podvesti pod analizu sinusoidalnog ustaljenog stanja. U praktički svim ostalim primjenama, posebno u elektronici, stvarne mreže su *višeharmonijske* i ako su *stabilne*, bitna je analiza njihovog nesinusoidalnog ustaljenog stanja.

Mreža je višeharmonijska ako u njoj u ustaljenom stanju, u valnom obliku neke varijable $f(t)$ postoje *barem dva* harmonijska člana, recimo

$$f(t) = \hat{A}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{A}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \ ; \ \omega_1 \neq \omega_2$$

pri čemu jedna od frekvencija ω_1 ili ω_2 može biti jednaka nuli. U protivnom, mreža je *jednoharmonijska*.

U skladu s rečenim u jednoharmonijske mreže se ubrajaju :

a) istosmjerne mreže s linearnim i/ili nelinearnim vremenski nepromjenljivim elementima, i
b) izmjenične linearne vremenski nepromjenljive mreže u kojima djeluje jednoharmonijski poticaj.

Ove su mreže u općem slučaju *rješive*.

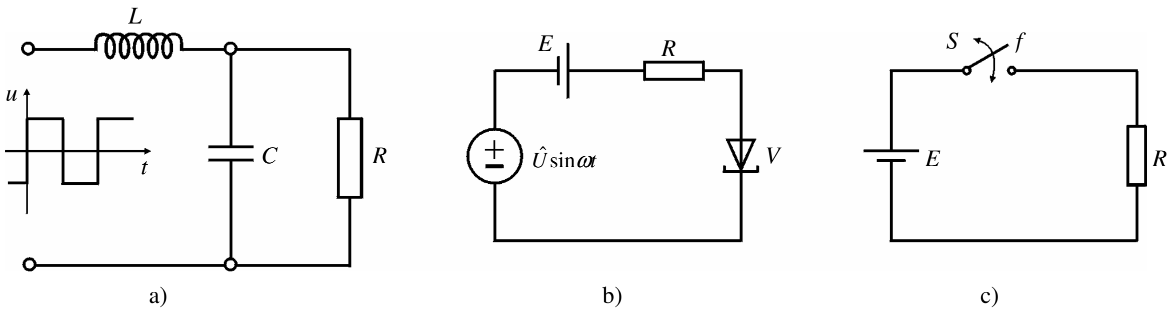
Višeharmonijske mreže dijele se na *linearne* i *nelinearne* višeharmonijske mreže.

Linearne višeharmonijske mreže su sve mreže sa linearnim vremenski nepromjenljivim elementima u kojima djeluju *periodični nesinusni poticaji*. Ove su mreže ***u općem slučaju rješive***.

Nelinearne višeharmonijske mreže dijele se na dvije osnovne vrste:

a) *neistosmjerne mreže* s nelinearnim vremenski nepromjenljivim elementima, i
b) mreže s *vremenski promjenljivim elementima*.

Ove su mreže ***u općem slučaju nerješive***.



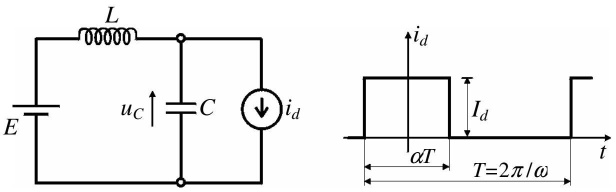
Sl. 13.1 Primjeri višeharmonijskih mreža
a) Linearna višeharmonijska mreža (R,L,C su linearni vremenski nepromjenljivi elementi).
b) Neistosmjerna nelinearna mreža (V - tunel dioda).
c) Mreža s vremenski promjenljivim elementom (S - periodički upravljana sklopka).

13. TOČNE METODE ANALIZE VIŠEHARMONIJSKIH MREŽA

13.1 LINEARNE VIŠEHARMONIJSKE MREŽE

13.1.1 Metoda fazorske transformacije

Da bi se u analizi linearnih višeharmonijskih mreža mogla primijeniti metoda fazorske transformacije mora biti poznat *rastav* napona odnosno struja svih nezavisnih izvora (uvora) mreže u Fourierov red. Tada se izračuna odziv za svaki harmonijski član posebno, a ukupni se odziv dobije zbrajanjem svih parcijalnih odziva. Pokažimo to na primjeru mreže sheme spoja prema slici 13.2., gdje treba odrediti napon na kapacitetu u_C u ustaljenom stanju.



a) b)

Sl.13.2 a) Zadana shema spoja.
b) Valni oblik struje strujnog uvora i_d.

Valni oblik struje strujnog uvora $i_d(t)$ je zadan i razvijen u Fourierov red glasi

$$i_d = \alpha I_d + \sum_{n=1}^{\infty} i_d(n,t) \tag{1}$$

gdje je

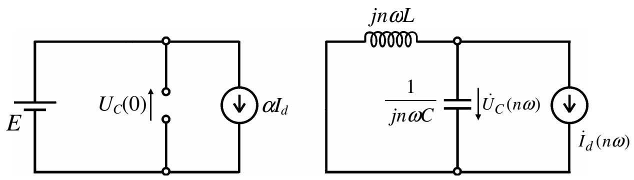
$$i_d(n,t) = \frac{2I_d}{\pi}\frac{\sin n\pi\alpha}{n}\cos n\omega t \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \dot{I}_d(n\omega) = \frac{2I_d}{\pi}\frac{\sin n\pi\alpha}{n}\angle 0^\circ \tag{2}$$

Budući da je mreža linearna i vremenski nepromjenljiva, to je očigledno napon na kapacitetu

$$u_C = U_C(0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_C(n,t) \tag{3}$$

pri čemu je u skladu sa slikom 13.3 odmah vidljivo da je $U_C(0) = E$.



a) b)

Sl. 13.3 a) Nadomjesna shema spoja za istosmjerni član.
b) Nadomjesna shema spoja za n-ti harmonijski član.

Proizlazi da je za n-ti harmonijski član

$$\dot{I}_d(n\omega) = (jn\omega C + \frac{1}{jn\omega L}) \cdot \dot{U}_C(n\omega)$$

odnosno :

$$\dot{U}_C(n\omega) = \frac{jn\omega L}{1-n^2\omega^2 LC}\dot{I}_d(n\omega) =$$

$$= j\frac{\cancel{n}\omega L}{1-n^2\omega^2 LC}\frac{2I_d}{\pi}\frac{\sin n\pi\alpha}{\cancel{n}}$$

Vraćanjem u vremensko područje i uzimajući u obzir predznak od $u_C(t)$, pretpostavljen na slici 13.2.a, dobivamo da je

$$u_C(n,t) = \frac{2\omega L I_d}{\pi}\frac{\sin n\pi\alpha}{1-n^2\omega^2 LC}\sin n\omega t$$

odnosno za valni oblik napona na kapacitetu

$$u_C = E + \frac{2\omega L I_d}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\alpha}{1-n^2\omega^2 LC}\sin n\omega t \tag{4}$$

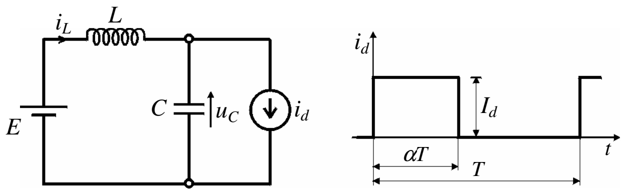
Napomene :

a) Pri $n^2\omega^2 LC \to 1 \Rightarrow u_C(t) \to \infty$, tj. dobivamo uvjete *paralelne* rezonancije.

b) Fazorska transformacija *nije spretna* metoda analize ako se, primjerice, traži vršna vrijednost napona na kapacitetu, što može biti važan projektantski podatak !

13.1.2 Analiza u vremenskom području

Pokažimo kako se isti zadatak, riješen u prethodnom odsječku fazorskom transformacijom, rješava u vremenskom području. Zbog jednostavnijeg opisa jednadžbi, valni oblik struje strujnog uvora $i_d(t)$ pomaknut je u desno za $\alpha T/2$, kako to pokazuje slika 13.4.



Sl.13.4 Analizirana shema spoja.

Razlikuju se dva intervala rada:

a) interval A $0 \le t \le \alpha T$

$$E = L\frac{di_L}{dt} + u_C \; ; \; i_L = C\frac{du_C}{dt} + I_d$$

b) interval B $\alpha T \le t \le T$

$$E = L\frac{di_L}{dt} + u_C \; ; \; i_L = C\frac{du_C}{dt}$$

Budući da je

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{di_C}{dt} = C\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

u oba intervala vrijedi *ista diferencijalna jednadžba* :

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = E \tag{5}$$

što znači da je u intervalu A rješenje diferencijalne jednadžbe (5)

$$u_{C,A} = A_1 \sin\omega_0 t + A_2\cos\omega_0 t + E \tag{6}$$

a u intervalu B

$$u_{C,B} = B_1 \sin\omega_0(t-\alpha T) + B_2\cos\omega_0(t-\alpha T) + E \tag{7}$$

gdje je

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Struja kroz induktivitet je u intervalu A dana izrazom

$$\begin{aligned} i_{L,A} &= C\frac{du_{C,A}}{dt} + I_d = \\ &= \omega_0 C A_1 \cos\omega_0 t - \omega_0 C A_2 \sin\omega_0 t + I_d \end{aligned} \quad (8)$$

a u intervalu B izrazom

$$\begin{aligned} i_{L,B} &= C\frac{du_{C,B}}{dt} = \\ &= \omega_0 C B_1 \cos\omega_0 (t-\alpha T) - \omega_0 C B_2 \sin\omega_0 (t-\alpha T) \end{aligned} \quad (9)$$

Postavljena je zadaća riješena ako znamo odrediti konstante A_1, A_2, B_1 i B_2. S obzirom na to da se traži ustaljeno stanje, to iz ***uvjeta periodičnosti*** proizlazi da mora biti :

$$u_{C,A}(0) = u_{C,B}(T) \;;\; i_{L,A}(0) = i_{L,B}(T) \quad (10)$$

a iz ***zakona komutacije*** da mora vrijediti da je

$$u_{C,A}(\alpha T) = u_{C,B}(\alpha T) \;;\; i_{L,A}(\alpha T) = i_{L,B}(\alpha T) \quad (11)$$

Na osnovi uvjeta periodičnosti (10) i zakona komutacije (11) te koristeći izraze za napone na kapacitetu i struje kroz induktivitet dobivamo četiri jednadžbe u četiri nepoznanice, odakle se dobiva da je

$$A_1 = -\omega_0 L I_d \frac{\sin\frac{1-\alpha}{2}\omega_0 T \cdot \cos\frac{\alpha\omega_0 T}{2}}{\sin\frac{\omega_0 T}{2}}$$

$$A_2 = -B_2 = \omega_0 L I_d \frac{\sin\frac{1-\alpha}{2}\omega_0 T \cdot \sin\frac{\alpha\omega_0 T}{2}}{\sin\frac{\omega_0 T}{2}}$$

$$B_1 = \omega_0 L I_d \frac{\cos\frac{1-\alpha}{2}\omega_0 T \cdot \sin\frac{\alpha\omega_0 T}{2}}{\sin\frac{\omega_0 T}{2}}$$

čime je postavljena zadaća u potpunosti riješena.

Napomena: Za razliku od analize metodom fazorske transformacije, u vremenskom području je posve jednostavno odrediti vršnu vrijednost napona na kapacitetu! Očigledno je, naime

$$\begin{aligned} u_{C,M} &= u_{C,A}(0) = u_{C,B}(T) = \\ &= E + \omega_0 L I_d \frac{\sin\frac{\alpha\omega_0 T}{2}\sin\frac{1-\alpha}{2}\omega_0 T}{\sin\frac{\omega_0 T}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

13.2 MREŽE LINEARNE PO ODSJEČCIMA
(N.D. Papaleksi, 1912.)

Nelinearne mreže, u kojima se karakteristike *svih* nelinearnih elemenata mogu, s prihvatljivom tehničkom točnošću, aproksimirati *odsječcima pravaca* nazivaju se ***mreže linearne po odsječcima***. To znači da se pri određivanju ustaljenog stanja perioda rada T dijeli na intervale, a unutar svakog intervala mreža je opisana sustavom linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Dakle, mreža je u ustaljenom stanju *periodički promjenljive strukture*, linearna u svakom dijelu periode u kojem je struktura nepromijenjena, ali *nelinearna promatrano u cjelini*.

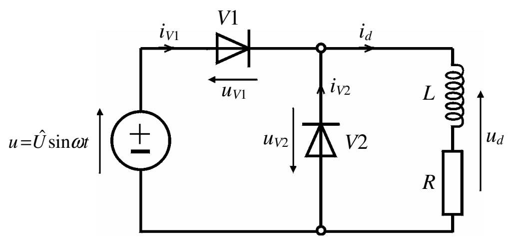
Osnovni problem analize ovih mreža nije rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi po intervalima nego određivanje tzv. *tipa periodičkog rješenja*, tj. *kako* i *kada* se unutar periode rada prelazi s jednog linearnog sustava na drugi (s jednog odsječka pravca na drugi). Opća metoda za određivanje tipa periodičkog rješenja *ne postoji*.

Pokažimo na jednom jednostavnom primjeru kako se u nekim slučajevima može odrediti tip periodičkog rješenja.

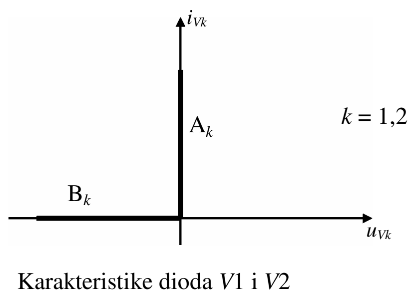
13.2.1 Određivanje tipa periodičkog rješenja

Zadana je shema spoja prema slici 13.5.a, a zbog pretpostavke o idealnosti dioda $V1$ i $V2$, slika 13.5.b, mreža je linearna po odsječcima.

Karakteristika svake diode V prema slici 13.5.b sastoji se od dva pravca; karakteristike vođenja A_k i karakteristike nevođenja B_k. To znači da su u općem slučaju moguća



Sl. 13.5 a) Zadana shema spoja.



Sl. 13.5 b) Karakteristike dioda $V1$ i $V2$
(A_k - karakteristika vođenja k-te diode,
B_k - karakteristika nevođenja k-te diode).

četiri intervala rada
- A = (A_1, A_2), kad obje diode vode,
- B = (B_1, B_2), kad obje diode ne vode,
- C = (A_1, B_2), kad vodi dioda $V1$, a ne vodi dioda $V2$, i
- D = (B_1, A_2), kad ne vodi dioda $V1$, a vodi dioda $V2$,

s time da se unutar periode rada $T=2\pi/\omega$ intervali mogu i ponoviti.

Jednadžbe mreže su :

$$\begin{aligned} u &= u_{V1} - u_{V2} \\ 0 &= u_{V2} + u_d \\ i_d &= i_{V1} + i_{V2} \end{aligned} \tag{13}$$

dok su konstitutivne relacije elemenata mreže u granama dane izrazima

$$u_d = L\frac{di_d}{dt} + Ri_d \tag{14}$$

odnosno za diode (k=1,2):

$$\begin{aligned} A_k &= \{u_{Vk} = 0 \ ; \ i_{Vk} > 0\} \\ B_k &= \{u_{Vk} < 0 \ ; \ i_{Vk} = 0\} \end{aligned} \tag{15}$$

Zaključujemo:

a) Interval A *ne postoji*. Zaista, kad bi taj interval postojao moralo bi zbog $i_{V1} > 0$ i $i_{V2} > 0$ biti i $u_{V1} = u_{V2} = 0$. No, tada je prema (13), $u = 0$, što *nije istina*.

b) Interval B *može postojati*. Budući da je $i_{V1} = i_{V2} = 0$ to je prema (14) i $u_d = 0$. Ali, tada je u skladu sa (13) $u = u_{V1}$, te dioda $V1$ neće voditi samo ako je $u < 0$.

c) Interval C *može postojati*. Budući da je $u_{V1} = 0$, $u_{V2} < 0$, to je prema (13)
$$u = -u_{V2}$$
odakle proizlazi da mora biti $u > 0$!

d) Interval D *može postojati*. Budući da je $u_{V1} < 0$, $u_{V2} = 0$, to je prema (13)
$$u = u_{V1}$$
odakle proizlazi da mora biti $u < 0$!

Proizlazi da za vrijeme pozitivne poluperiode napona $u = \hat{U} \sin \omega t$ može postojati samo *interval* C. Za vrijeme negativne poluperiode mogu postojati intervali B i D, što znači da u nastavku analize valja razmotriti četiri moguća slijeda intervala za vrijeme negativne poluperiode. To su: B, BD, DB i D.

Odmah opažamo da slučajevi B i BD nisu mogući. U protivnom, bio bi prekršen zakon o očuvanju toka. Usvojimo li u praksi uobičajenu pretpostavku da je

$$\frac{L}{R} >> T$$

nije moguć ni slijed intervala DB. Zaključujemo da za vrijeme negativne poluperiode postoji *interval D*. Time je određen tip periodičkog rješenja.

Zadana mreža sheme spoja prema slici 13.5.a opisana je u potpunosti diferencijalnom jednadžbom

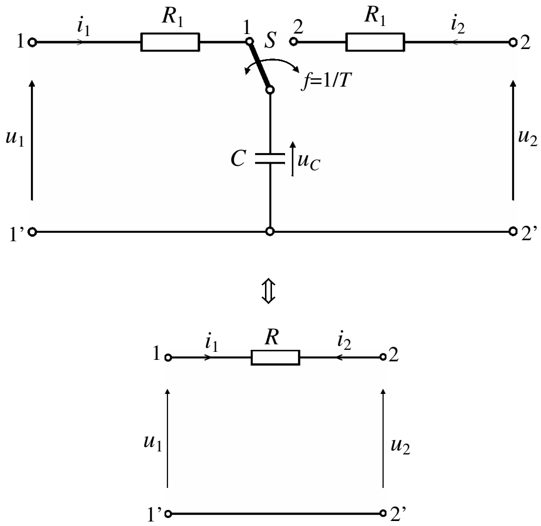
$$L\frac{di_d}{dt} + Ri_d = \begin{cases} \hat{U} \sin \omega t & +0 \le \omega t \le \pi - 0 \\ 0 & \pi + 0 \le \omega t \le 2\pi - 0 \end{cases} \tag{16}$$

koja se rješava na način pokazan u prethodnom odsječku 13.1.2.

13.2.2 Tip periodičkog rješenja je zadan

U mnogim za praksu važnim slučajevima tip periodičkog rješenja *zadan je unaprijed*. Karakterističan primjer su ***sklopovi s periodički upravljanim sklopkama*** kod kojih prijelaz iz jednog linearnog odsječka u drugi nije diktiran vanjskim krugom nego unaprijed zadanim zakonom upravljanja. Analiza ovih sklopova provodi se na način pokazan u odsječku 13.1.2.

Ilustrativan primjer ovakvih mreža su sklopkama preklapani kapaciteti s pomoću kojih se u tehnici integriranih krugova mogu realizirati otpornici, slika 13.6.



Sl.13.6 Realizacija otpornika R s pomoću sklopkama preklapanog kapaciteta.

Neka je sklopka S polovinu periode u položaju 1, a polovinu periode u položaju 2. Vrijedi :

$$R_1 C\frac{du_C}{dt} + u_C = \begin{cases} u_1 & 0 \le t \le T/2 \\ u_2 & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

Pretpostavimo da je perioda sklapanja T dovoljno kratka da se naponi u_1 i u_2 unutar jedne periode T *ne promijene*, a također pretpostavimo da je $R_1C<<T$. Tada je

$$u_C \approx \begin{cases} u_1 & 0 \le t \le T/2 \\ u_2 & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

Količina naboja prenesena kapacitetom od prilaza 1 na prilaz 2 u periodi T jednaka je

$$\frac{C(u_1 - u_2)}{T} = fC(u_1 - u_2) = i$$

što je ekvivalentno prolazu iste količine naboja kroz otpornik otpornosti

$$R = \frac{1}{fC} \tag{17}$$

U skladu s izloženim u odsječku 9.1.5 energija pretvorena u toplinu u otpornicima R_1 bit će zbog jednog nabijanja i jednog izbijanja u periodi

$$W_R = 2 \cdot \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \cdot C(u_1 - u_2) = C(u_1 - u_2)^2$$

odnosno snaga "otpornika" bit će jednaka

$$P_R = f \cdot W_R = fC(u_1 - u_2)^2$$

što odgovara disipaciji na otporniku otpornosti $R=1/fC$ na koji je narinut napon $u_1 - u_2$.

Napomena: Periodički upravljana sklopka S realizira se u praksi s pomoću dva MOS-tranzistora u protutaktnom sklopnom režimu rada. Sa R_1 označene su otpornosti MOS-tranzistora u stanju vođenja.