

XIV. PREDAVANJE

Načelo ravnoteže harmonijskih članova. Inherentna približnost rješenja. Duffingova diferencijalna jednačina. Određivanje osnovnog harmonijskog člana rješenja. Grafički postupak. Konzervativni odziv. Nekonzervativni odziv. Nestabilno područje amplitudne karakteristike. Histereza. Ostali harmonijski članovi rješenja. Kaotično ponašanje. Simetrično periodičko rješenje. Nesimetrična periodička rješenja. Utjecaj početnih uvjeta. Uvjeti postojanja istosmjernog komponente toka u nelinearnom induktivitetu.

14. NELINEARNE IZMJENIČNE MREŽE

Određivanje tipa periodičkog rješenja jest najteži dio zadaće analize mreža u kojima postoje nelinearni elementi karakteristike kojih se mogu aproksimirati odsječcima pravaca i kod kojih prijelaz s jednog odsječca pravca na drugi ovisi samo o uvjetima vanjskog kruga. Karakteristični primjeri takvih mreža su mreže s diodama, nelinearnim induktivitetima i kapacitetima.

Određivanje tipa periodičkog rješenja može se izbjeći ako se odustane od prikaza karakteristika nelinearnih elemenata odsječcima pravaca te se umjesto toga primijeni neka *nelinearna aproksimacija*. Tada je mreža opisana nelinearnim diferencijalnim jednačinama i jedino važno pitanje jest mogu li se tako dobivene diferencijalne jednačine riješiti. Pri tome ćemo obično biti zadovoljni i *približnim rješenjem*. Metoda za dobivanje približnih rješenja ima mnogo. Jedna od najvažnijih osniva se na *načelu ravnoteže harmonijskih članova*.

14.1 NAČELO RAVNOTEŽE HARMONIJSKIH ČLANOVA

Pretpostavimo nelinearnu mrežu na koju djeluje *jednoharmonijski poticaj* oblika

$$x(t) = \hat{X}_{cl} \cos \omega_1 t + \hat{X}_{sl} \sin \omega_1 t$$

i koja je po varijabli odziva $y(t)$ opisana nekom *nelinearnom diferencijalnom jednačinom*. Budući da je mreža nelinearna to se u odzivu *pojavljuju nove frekvencije* i kao rješenje možemo *očekivati* valni oblik odziva određen izrazom

$$y(t) = \sum_{k=1}^m \hat{Y}_{ck} \cos \omega_k t + \sum_{k=1}^m \hat{Y}_{sk} \sin \omega_k t ; \quad (1)$$

$$k = 1, 2, \dots, l, \dots, m$$

Uvrstimo ovo pretpostavljeno rješenje u polaznu nelinearnu diferencijalnu jednačinu i sve njene članove izrazimo s pomoću sume harmonijskih članova. Polazna diferencijalna jednačina prelazi u oblik

$$\sum_{k=1}^m A_{ck} \cos \omega_k t + \sum_{k=1}^m A_{sk} \sin \omega_k t + \sum_{k=1}^n B_{ck} \cos \omega'_k t + \sum_{k=1}^n B_{sk} \sin \omega'_k t =$$

$$= \hat{X}_{cl} \cos \omega_1 t + \hat{X}_{sl} \sin \omega_1 t ; \quad \omega_k \neq \omega'_k \quad (2)$$

Koeficijenti B_{ck} i B_{sk} pojavljuju se zbog postojanja *nelinearnih članova* u polaznoj diferencijalnoj jednačini. Koeficijenti A_{ck} i A_{sk} ovisi o svim pretpostavljenim, ali još neodređenim amplitudama \hat{Y}_{ck} i \hat{Y}_{sk} , $k = 1, 2, \dots, m$, tj.

$$A_{ck} = f_k(\hat{Y}_{c1}, \dots, \hat{Y}_{cm}; \hat{Y}_{s1}, \dots, \hat{Y}_{sm})$$

$$A_{sk} = g_k(\hat{Y}_{c1}, \dots, \hat{Y}_{cm}; \hat{Y}_{s1}, \dots, \hat{Y}_{sm})$$

Uravnoteženjem harmonijskih članova u jednačini (2) dobivamo :

$$\begin{aligned} A_{ck} &= 0 ; A_{sk} = 0 & \forall k \neq l \\ A_{cl} &= \hat{X}_{cl} ; A_{sl} = \hat{X}_{sl} \end{aligned} \quad (3)$$

Izrazima (3) određen je sustav od $2m$ algebarskih jednačini u $2m$ nepoznanica \hat{Y}_{ck} i \hat{Y}_{sk} , $k = 1, 2, \dots, m$. Rješenje je *približno*. Koeficijenti B_{ck} i B_{sk} ne mogu se uravnotežiti budući da *nisu bili pretpostavljeni* u rješenju (1)!

Pokažimo primjenu ove metode na primjeru nelinearnog izmjeničnog LC-kruga.

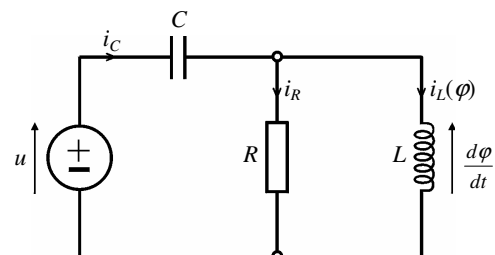
14.2 OSNOVNI HARMONIJSKI ČLAN RJEŠENJA (G. Duffing, 1918.)

Razmotrimo krug sheme spoja prema slici 14.1 napajan iz jednoharmonijskog naponskog izvora

$$u(t) = \hat{U}_c \cos \omega_1 t + \hat{U}_s \sin \omega_1 t$$

Induktivitet je nelinearan, karakteristike

$$i_L = \frac{1}{L_0} \varphi + a \varphi^3 ; \quad L_0 > 0, \quad a > 0$$



Sl.14.1 Analizirani krug.

Uzevši u obzir da je

$$u = u_C + \frac{d\varphi}{dt}; i_C = C \frac{du_C}{dt} = i_R + i_L =$$

$$= \frac{1}{R} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{L_0} \varphi + a\varphi^3 \quad (4)$$

dobivamo tzv. Duffingovu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi + h\varphi^3 = \omega_1 \hat{U}_s \cos \omega_1 t - \omega_1 \hat{U}_c \sin \omega_1 t \quad (5)$$

gdje je: $2\alpha = \frac{1}{RC} > 0$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $h = \frac{a}{C} > 0$.

Rješenje jednažbe (5) tražimo u obliku

$$\varphi = \hat{\Phi}_1 \cos \omega_1 t \quad (6)$$

što uvršteno u (5), te uzevši u obzir da je

$$\cos^3 \omega_1 t = \frac{3}{4} \cos \omega_1 t + \frac{1}{4} \cos 3\omega_1 t$$

dovodi do izraza

$$-\omega_1^2 \hat{\Phi}_1 \cos \omega_1 t - 2\alpha \omega_1 \hat{\Phi}_1 \sin \omega_1 t + \omega_0^2 \hat{\Phi}_1 \cos \omega_1 t +$$

$$+ \frac{3}{4} h \hat{\Phi}_1^3 \cos \omega_1 t + \frac{1}{4} h \hat{\Phi}_1^3 \cos 3\omega_1 t =$$

$$= \omega_1 \hat{U}_s \cos \omega_1 t - \omega_1 \hat{U}_c \sin \omega_1 t$$

U skladu s načelom ravnoteže harmonijskih članova vrijedit će

$$-\omega_1^2 \hat{\Phi}_1 + \omega_0^2 \hat{\Phi}_1 + \frac{3}{4} h \hat{\Phi}_1^3 = \omega_1 \hat{U}_s \quad (7)$$

$$2\alpha \omega_1 \hat{\Phi}_1 = \omega_1 \hat{U}_c$$

Ako se amplituda poticaja prikaže u obliku

$$\hat{X} = \omega_1 \sqrt{\hat{U}_c^2 + \hat{U}_s^2}$$

dobivamo iz (7) odredbenu jednadžbu za amplitudu odziva $\hat{\Phi}_1$, tj.

$$S^2(\omega_1, \hat{\Phi}_1) + 4\alpha^2 \omega_1^2 \hat{\Phi}_1^2 = \hat{X}^2 \quad (8)$$

gdje je

$$S(\omega_1, \hat{\Phi}_1) = (\omega_0^2 - \omega_1^2) \hat{\Phi}_1 + \frac{3}{4} h \hat{\Phi}_1^3$$

VAŽNO: Približnost rješenja je očigledna, budući da nismo mogli uravnotežiti član uz $\cos 3\omega_1 t$!

14.2.1 Konzervativni odziv

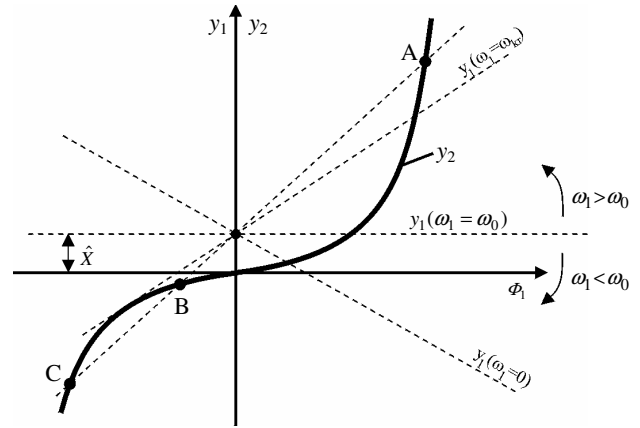
Pretpostavimo li konzervativni odziv, tj. $\alpha=0$, jednadžba (8) poprima oblik

$$S(\omega_1, \hat{\Phi}_1) = \hat{X}$$

odnosno može se napisati u obliku

$$y_1 = (\omega_1^2 - \omega_0^2) \hat{\Phi}_1 + \hat{X}; y_2 = \frac{3}{4} h \hat{\Phi}_1^3; y_1 = y_2$$

i tada riješiti grafički kako je pokazano na slici 14.2.



Sl.14.2 Određivanje amplitude odziva $\hat{\Phi}_1$ pri zadanoj amplitudi poticaja \hat{X} i promjenljivoj frekvenciji poticaja ω_1 .

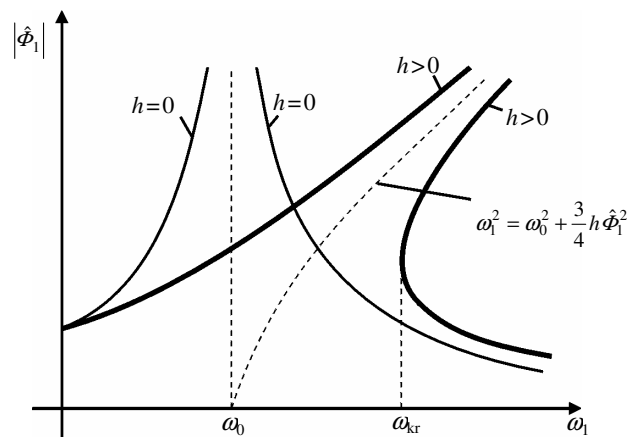
Opažamo:

- a) Za $\omega_1 = 0 \Rightarrow \hat{\Phi}_1 \neq 0$, što je naravno nefizikalni rezultat.
- b) Za $\omega_1 = \omega_0$ dobivamo da je unatoč $\alpha = 0$ amplituda titraja konačna i iznosi

$$\hat{\Phi}_1 \Big|_{\omega_1 = \omega_0} = \sqrt[3]{4\hat{X} / 3h} \quad (9)$$

U linearnom svijetu amplituda titraja bila bi beskonačna!

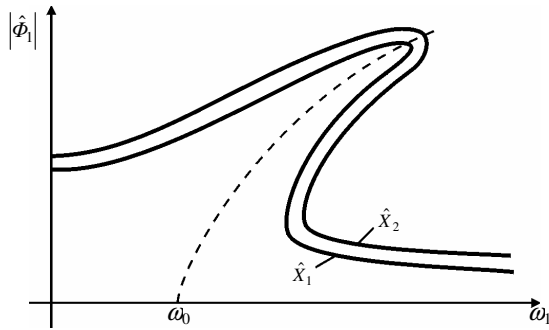
- c) Za frekvencije $\omega_1 > \omega_{kr}$ dobivaju se tri rješenja.



Sl.14.3. Amplitudna karakteristika kruga uz $h \neq 0$ i linearni slučaj $h = 0$.

14.2.2 Nekonzervativni odziv

Uzmemo li u obzir gušenje u krugu ($\alpha \neq 0$), to će amplitudne karakteristike za dvije vrijednosti poticaja \hat{X} izgledati kvalitativno kao na slici 14.4. Pretpostavimo da



Sl.14.4 Kvalitativni izgled amplitudnih karakteristika za $\alpha \neq 0$ i dvije vrijednosti amplitude poticaja $\hat{X}_2 > \hat{X}_1$.

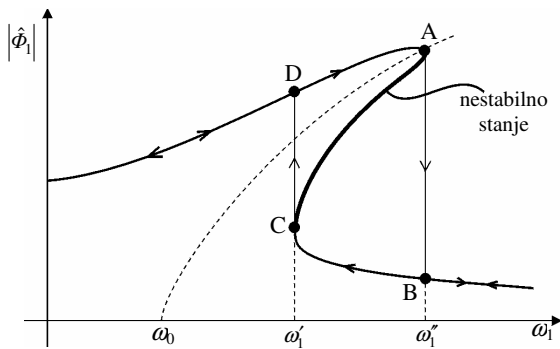
se pri fiksnom faktoru gušenja α i frekvenciji ω_1 poveća poticaj sa \hat{X}_1 na \hat{X}_2 , tj. tako da je $\Delta\hat{X} = \hat{X}_2 - \hat{X}_1 > 0$. Intuitivno je jasno da će u svakom stabilnom sustavu povećanje poticaja pratiti povećanje odziva, tj. za

$$\Delta\hat{X} > 0 \Rightarrow \Delta|\hat{\phi}_1| > 0$$

dok će smanjenje poticaja pratiti smanjenje odziva, tj. za

$$\Delta\hat{X} < 0 \Rightarrow \Delta|\hat{\phi}_1| < 0$$

No, na slici 14.4 opažamo da postoji segment amplitudne karakteristike označen na slici 14.5 sa AC, za koji vrijedi



Sl.14.5 Pojava petlje histereze.

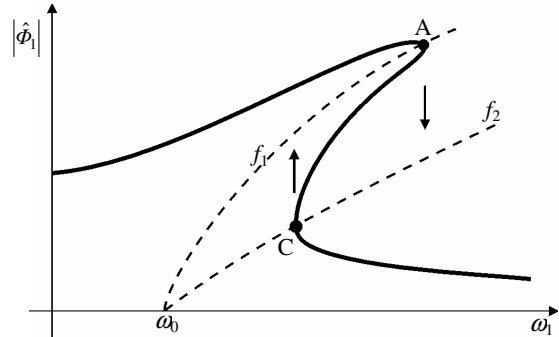
$$\Delta\hat{X} > 0 \Rightarrow \Delta|\hat{\phi}_1| < 0 \quad ; \quad \Delta\hat{X} < 0 \Rightarrow \Delta|\hat{\phi}_1| > 0$$

što je odlika *nestabilnih sustava*. U području frekvencija (ω'_1, ω''_1), amplituda odziva $|\hat{\phi}_1|$ može se nalaziti ili na segmentu DA ili na segmentu BC ovisno o tome je li pri ispitivanju povećavana ili smanjivana frekvencija ω_1 . Karakteristika opisuje *petlju histereze*.

Mjesta skokova A i C dobivaju se iz uvjeta

$$\frac{d\hat{\phi}_1}{d\omega_1} = \infty \quad \text{odnosno} \quad \frac{d\omega_1}{d\hat{\phi}_1} = 0.$$

Derivirajući izraz (8), te uz pretpostavku da je $\alpha \ll \omega_1$ dobivamo jednadžbe za određivanje mjesta skokova, kako je pokazano na slici 14.6.



Sl.14.6 Prikaz mjesta skokova.

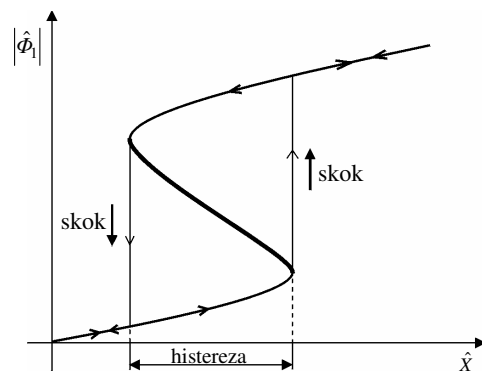
$$f_1(\omega_1, \hat{\phi}_1^2) = \omega_1^2 - \omega_0^2 - \frac{3}{4}h\hat{\phi}_1^2 = 0$$

$$f_2(\omega_1, \hat{\phi}_1^2) = \omega_1^2 - \omega_0^2 - \frac{9}{4}h\hat{\phi}_1^2 = 0$$

VAŽNO: Ako se u izrazu (8)

$$S^2(\omega_1, \hat{\phi}_1) + 4\alpha^2\omega_1^2\hat{\phi}_1^2 - \hat{X}^2 = 0$$

fiksira frekvencija, kao što je to uobičajen slučaj u elektroenergetici, a mijenja se amplituda poticaja \hat{X} , dobiva se kvalitativan prikaz karakteristike kao i skoka kao što je to prikazano na slici 14.7.



Sl.14.7 Pojava petlje histereze uz stalni faktor gušenja α i stalnu frekvenciju poticaja ω_1 .

14.3 OSTALI HARMONIJSKI ČLANOVI RJEŠENJA

14.3.1 Nadharmonijski članovi

Rješenje iz prethodnog zadatka je *približno*, budući da nismo mogli uravnotežiti član uz $\cos 3\omega_1 t$. Pretpostavimo s toga rješenja u obliku

$$\varphi = \hat{\Phi}_1 \cos \omega_1 t + \hat{\Phi}_3 \cos 3\omega_1 t \quad (10)$$

te, jednostavnosti, radi uzmimo da je $\alpha = 0$ i $\hat{U}_c = 0$. Uvrštenjem (10) u (5) i izjednačavanjem harmonijskih članova istih frekvencija dobivamo

a) član uz $\cos \omega_1 t$:

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)\hat{\Phi}_1 + \frac{3}{4}h\hat{\Phi}_1^3 + \frac{3}{4}h\hat{\Phi}_1\hat{\Phi}_3(\hat{\Phi}_1 + 2\hat{\Phi}_3) = \hat{X}$$

b) član uz $\cos 3\omega_1 t$:

$$(\omega_0^2 - 9\omega_1^2)\hat{\Phi}_3 + \frac{3}{4}h\hat{\Phi}_3^3 + \frac{1}{4}h\hat{\Phi}_1^2(\hat{\Phi}_1 + 6\hat{\Phi}_3) = 0$$

odakle se dobivaju $\hat{\Phi}_1$ i $\hat{\Phi}_3$. Bitno je uočiti da je i ovo rješenje približno, budući da se nakon uvrštenja izraza (10) u (5) dobivaju i članovi uz $\cos 5\omega_1 t$, $\cos 7\omega_1 t$ i $\cos 9\omega_1 t$ koji se ne mogu uravnotežiti.

14.3.2 Podharmonijski članovi

Pokažimo da je u promatranoj mreži moguć podharmonik reda 1/3. Uz $\alpha = 0$ i $\hat{U}_c = 0$, diferencijalna jednadžba (5) može se napisati u obliku

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi + h\varphi^3 = \hat{X} \cos 3\omega t ; \omega_1 = 3\omega$$

Ako se u rješenju očekuje samo podharmonijski član $\varphi = \hat{\Phi} \cos \omega t$, dobivamo

$$-\omega^2\hat{\Phi} \cos \omega t + \omega_0^2\hat{\Phi} \cos \omega t + h\hat{\Phi}^3 \left(\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \right) = \hat{X} \cos 3\omega t$$

što nakon izjednačenja harmonijskih članova daje odredbene jednadžbe

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_0^2)\hat{\Phi} + \frac{3}{4}h\hat{\Phi}^3 &= 0 \\ \frac{1}{4}h\hat{\Phi}^3 &= \hat{X} \end{aligned}$$

odnosno:

$$\hat{\Phi} = \sqrt[3]{4\hat{X}/h} ; \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}h\hat{\Phi}^2 \quad (11)$$

Opažamo da, ako su u krugu zadovoljeni uvjeti (9), titraji se mogu postići samo na podharmonijskom članu frekvencije tri puta manje od frekvencije poticaja.

14.3.3 Opći slučaj

U promatranom krugu u stvarnosti istodobno se pojavljuju i nadharmonijski i podharmonijski članovi. Ovaj

problem još je neriješen. Za podharmonijske se titraje zna da njihova pojava ovisi o početnim uvjetima.

VAŽNO: Načelo ravnoteže harmonijskih članova pokazuje koji se harmonijski članovi mogu pojaviti u rješenju, ali ne i to postoje li oni stvarno. Da bi određeni harmonijski članovi postojali u rješenju, te komponente rješenja moraju biti stabilne.

Napomena: Za promatrani krug sheme spoja prema slici 14.1 zna se da je najjednostavniji krug potican jednoharmonijskim signalom koji pri određenim vrijednostima amplitude poticaja iskazuje **kaotično ponašanje**. Predkaotično ponašanje karakterizira proces udvostručavanja periode (pojava podharmonijskih parnih članova), tzv. *Feigenbaumov put u kaos*.

14.4 O PERIODIČKIM RJEŠENJIMA NELINEARNIH IZMJENIČNIH MREŽA

Neka se svojstva periodičkih ustaljenih stanja (periodičkih rješenja) mogu otkriti izravno iz jednadžbi koje opisuju razmatrane mreže. Pokažimo to na primjeru nelinearnog izmjeničnog kruga sheme spoja prema slici 14.1.

U jednadžbama koje opisuju zadani krug zgodno je kao varijable odziva (rješenje) upotrijebiti *neprekinute varijable*. To su napon na kapacitetu $u_C(t)$ i s obzirom da je induktivitet nelinearan, tok $\varphi(t)$. U skladu sa (4), uz pretpostavku da je $u = \hat{U} \cos \omega t$, proizlaze ove jednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -u_C + \hat{U} \cos \omega t \\ \frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{RC}(\hat{U} \cos \omega t - u_C) + \frac{1}{C}f(\varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

gdje je sa $i_L = f(\varphi)$ označena nelinearna karakteristika induktiviteta. Dodatno pretpostavimo da je karakteristika $f(\varphi)$ neparno simetrična, tj. da je

$$f(\varphi) = -f(-\varphi)$$

14.4.1 Simetrično periodičko rješenje

Iz jednadžbi (12) proizlaze dvije vrste simetrije periodičkog rješenja. Prva simetrija je **periodičnost**. Zamjenom

$$\varphi \mapsto \varphi ; u_C \mapsto u_C ; t \mapsto t + T$$

gdje je $T=2\pi/\omega$ perioda rada izmjeničnog izvora, jednadžbe (12) ostaju nepromijenjene. Prema tome, ako je $[\varphi(t), u_C(t)]$ rješenje kruga, onda je i $[\varphi(t+T), u_C(t+T)]$ također njegovo rješenje.

Druga vrsta simetrije je **neparna simetričnost**. Zamjenom

$$\varphi \mapsto -\varphi ; u_C \mapsto -u_C ; t \mapsto t + T/2$$

jednadžbe (12) poprimaju oblik

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(-\varphi) &= -(-u_C) + \hat{U} \cos \omega(t+T/2) \\ \frac{d}{dt}(-u_C) &= \frac{1}{RC} \left[\hat{U} \cos \omega(t+T/2) - (-u_C) \right] + \frac{1}{C} f(-\varphi) \end{aligned} \quad (13)$$

Budući da je $\hat{U} \cos \omega(t+T/2) = -\hat{U} \cos \omega t$, te da je $f(-\varphi) = -f(\varphi)$, to će sustav jednadžbi (13) biti jednak sustavu jednadžbi (12).

Proizlazi da ako je $[\varphi(t), u_C(t)]$ rješenje kruga, onda je i $[-\varphi(t+T/2), -u_C(t+T/2)]$ također njegovo rješenje.

14.4.2 Nesimetrična periodička rješenja

Pretpostavimo da je rješenje kruga $[\varphi(t) - \Phi_0, u_C(t)]$. Zamijenimo li

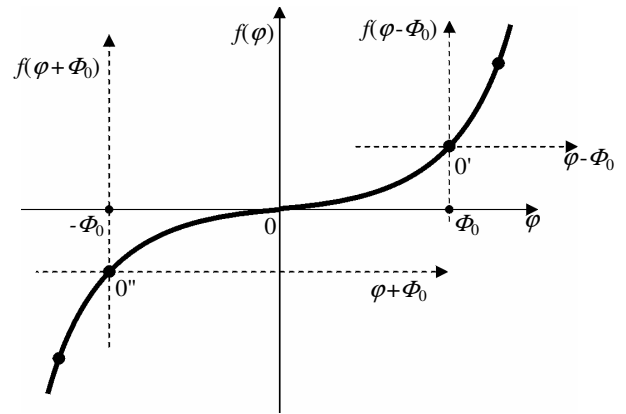
$$\varphi - \Phi_0 \mapsto -\varphi - \Phi_0 ; u_C \mapsto -u_C ; t \mapsto t + T/2$$

opažamo da će oba sustava jednadžbi biti jednaka ako je $f(\varphi - \Phi_0) = -f(-\varphi - \Phi_0)$ što se lako vidi da je točno iz slike 14.8.

Proizlazi da postoje *dva nesimetrična periodička rješenja*:

$$[\varphi(t) - \Phi_0, u_C(t)] \text{ i } [-\varphi(t+T/2) - \Phi_0, -u_C(t+T/2)]$$

To je i logično budući da je za $\Phi_0 \neq 0$ karakteristika nelinearnog induktiviteta nesimetrična i to tako da su moguće dvije nesimetrične karakteristike, jedna za $\Phi_0 > 0$, druga za $\Phi_0 < 0$. Koja će se od njih stvarno realizirati ovisi o *početnim uvjetima*. Eksperimenti pokazuju da se jedno od nesimetričnih periodičkih rješenja dobiva povećavanjem amplitude poticaja nakon skoka, slika 14.7.



Sl.14.8 Uz dokaz da je $f(\varphi - \Phi_0) = -f(-\varphi - \Phi_0)$.

Obično se smatra da je za postojanje istosmjerne komponente toka induktiviteta nužan uvjet postojanje istosmjerne komponente struje kroz induktivitet. To nije točno! Protuprimjer je analizirani krug sheme spoja prema slici 14.1. Koristeći Kirchhoffove zakone za srednje vrijednosti lako vidimo da zbog $I_C(0) \equiv 0$ i $U_L(0) \equiv 0$ nelinearnim induktivitetom može teći samo izmjenična struja. Unatoč tome, istosmjerna komponenta toka $\Phi_0 \neq 0$ postoji. Razlog je u tome što istosmjerna komponenta toka može biti stvorena i ako u struji induktiviteta osim osnovnog harmonijskog člana postoji barem jedan **parni**, bilo podharmonijski, bilo nadharmonijski član. U analiziranom primjeru, zbog nelinearnosti induktiviteta, upravo se i to događa. Povećavanjem amplitude napona poticaja prvo se pojavljuju parni nadharmonijski članovi a zatim i parni podharmonijski članovi kao predznaci kasnijeg kaotičnog ponašanja.