XV. PREDAVANJE

Temeljne komponente rastava djelatne snage elementa mreže: istosmjerna snaga, izmjenična snaga. Djelatna snaga na frekvenciji. Nemogućnost pretvorbe snage na frekvenciji s pomoću linearnih vremenski nepromjenljivih elemenata. Mogućnost pretvorbe s pomoću nelinearnih vremenski nepromjenljivih reaktivnih elemenata. Mogućnosti pretvorbe s pomoću nelinearnih otpora. Karakteristični primjeri: dioda, bipolarni tranzistor, MOSFET. Zakon o očuvanju djelatnih snaga na frekvenciji. Pojam modulatora. Kombinacijske frekvencije. Manley-Rowe jednadžbe. Primjeri stabilnog i nestabilnog modulatora. Hartleyev efekt.

15. ENERGETSKI ODNOSI − DJELATNA SNAGA

15.1 RASTAV DJELATNE SNAGE ELEMENTA MREŽE NA KOMPONENTE

Odredimo djelatnu snagu jednoprilaznog elementa mreže α koji se nalazi u sastavu neke višeharmonijske mreže. U *periodičkom ustaljenom stanju* napon i struja tog elementa mreže mogu se prikazati Fourierovim redovima:

$$u_\alpha(t) = U_\alpha(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{U}_\alpha(n)\cos n\omega t + \hat{V}_\alpha(n)\sin n\omega t\right] \quad (1a)$$

$$i_\alpha(t) = I_\alpha(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{I}_\alpha(n)\cos n\omega t + \hat{J}_\alpha(n)\sin n\omega t\right] \quad (1b)$$

pri čemu je *perioda rada* $T=2\pi/\omega$; n=1,2,...

Vrijednosti $U_\alpha(0)$ i $I_\alpha(0)$ su *srednje vrijednosti* odgovarajućih valnih oblika napona i struje,

$$U_\alpha(0) = \frac{1}{T}\int_0^T u_\alpha(t)dt \;;\; I_\alpha(0) = \frac{1}{T}\int_0^T i_\alpha(t)dt \quad (2)$$

dok su $\hat{U}_\alpha(n)$ i $\hat{V}_\alpha(n)$ *amplitude ortogonalnih komponenata* n-tog harmonijskog člana napona,

$$\begin{aligned}\hat{U}_\alpha(n) &= \frac{2}{T}\int_0^T u_\alpha(t)\cos n\omega t dt\\ \hat{V}_\alpha(n) &= \frac{2}{T}\int_0^T u_\alpha(t)\sin n\omega t dt\end{aligned} \quad (3)$$

a analogni izrazi vrijede i za vrijednosti od $\hat{I}_\alpha(n)$ i $\hat{J}_\alpha(n)$.

Djelatna snaga je ***srednja vrijednost trenutne snage***,

$$P_\alpha = \frac{1}{T}\int_0^T u_\alpha i_\alpha dt \quad (4)$$

i nakon uvrštenja izraza (1) u (4), uzimajući u obzir ortogonalnost funkcije sinus i kosinus na periodi T dobivamo izraz

$$P_\alpha = P_\alpha(0) + \tilde{P}_\alpha \quad (5)$$

u kojem je djelatna snaga P_α rastavljena na *dvije temeljne* komponente. To su:

a) ***istosmjerna snaga*** elementa mreže α

$$P_\alpha(0) = U_\alpha(0)I_\alpha(0) \quad (6)$$

b) ***izmjenična snaga*** elementa mreže α

$$\tilde{P}_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} P_\alpha(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left[\hat{U}_\alpha(n)\hat{I}_\alpha(n) + \hat{V}_\alpha(n)\hat{J}_\alpha(n)\right] \quad (7)$$

gdje je sa $P_\alpha(n)$ označena *djelatna snaga elementa mreže* α *na frekvenciji* $\omega_n=n\omega$

Napomena: Trenutna snaga $p_\alpha(t)=u_\alpha(t)i_\alpha(t)$ može se prikazati Fourierovim redom na analogni način kao i $u_\alpha(t)$ i $i_\alpha(t)$, ali srednja vrijednost od $p_\alpha(t)$, koja je jednaka P_α očigledno *nije* jednaka $P_\alpha(0)$, kao što ni $P_\alpha(n)$, definiran izrazom (7), *nije* Fourierov koeficijent od $p_\alpha(t)$!

15.2 PRETVORBA DJELATNE SNAGE NA FREKVENCIJI

Ovisno o predznaku snage, element mreže α se na nekoj frekvenciji može ponašati kao trošilo a na nekoj drugoj kao izvor,

$$P_\alpha(n) \begin{array}{c} > \\ < \end{array} 0 \quad \begin{array}{c}\text{trošilo}\\ \text{izvor}\end{array} \qquad n=0,1,2,... \quad (8)$$

Ovo je svojstvo temelj svake analize kojom bi se željelo istražiti može li neki element mreže preuzeti snagu na jednoj frekvenciji i predati ju drugim dijelovima mreže na nekoj drugoj frekvenciji (ili skupu frekvencija). Ovo se svojstvo u praksi traži od *djelila frekvencije, sklopova energetske elektronike*, *modulatora* i dr. U osnovi svih tih uređaja leži proces ***pretvorbe djelatne snage na frekvenciji***.

15.2.1 Linearni vremenski nepromjenljivi elementi

Pokažimo da s pomoću linearnih vremenski nepromjenljivih elementa mreže pretvorba djelatne snage na frekvenciji *nije moguća*. Za *otpor* se odmah vidi da je zbog konstitutivne relacije

$$u_R = Ri_R \;;\quad R>0$$

ujedno i $\hat{U}_R(n) = R\hat{I}_R(n)$; $\hat{V}_R(n) = R\hat{J}_R(n)$ te je

$$P_R = RI_R^2(0) + \frac{1}{2} R \sum_{n=1}^{\infty} \hat{I}_R^2(n) + \frac{1}{2} R \sum_{n=1}^{\infty} \hat{J}_R^2(n) \qquad (9)$$

i *svi* su članovi rastava *pozitivnog* predznaka. Linearni vremenski nepromjenljivi otpor ($R > 0$) je *trošilo na svim frekvencijama*.

Za *linearni vremenski nepromjenljivi induktivitet* vrijedi da je

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} - n\omega\hat{I}_L(n)\sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} n\omega\hat{J}_L(n)\cos n\omega t\right]$$

tj. da je

$$\hat{U}_L(n) = n\omega L\hat{J}_L(n) \ ; \ \hat{V}_L(n) = -n\omega L\hat{I}_L(n) \ ; \ U_L(0) = 0$$

što uvršteno u (6) i (7) daje

$$P_L(n) = 0 \ ; \quad n = 0,1,2,... \qquad (10a)$$

Očigledno je i da bi se isti rezultat, tj.

$$P_C(n) = 0 \ ; \quad n = 0,1,2,... \qquad (10b)$$

dobio i za svaki linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet. Proizlazi da linearni vremenski nepromjenljivi reaktivni elementi ***ne sudjeluju*** u pretvorbi djelatne snage na frekvenciji.

15.2.2 Nelinearni vremenski nepromjenljivi reaktivni elementi

Za nelinearni vremenski nepromjenljivi induktivitet vrijedi da je zbog nedisipativnosti $P_L = 0$, a da je zbog $U_L(0) = 0$ i istosmjerna snaga jednaka nuli, tj. $P_L(0) = 0$, što sve uvršteno u (5) daje

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_L(n) = 0 \qquad (11a)$$

Da bi ovaj zbroj bio jednak nuli, a svi članovi rastava nisu jednaki nuli kao što je to slučaj kod linearnih vremenski nepromjenljivih induktiviteta, pozitivni članovi rastava moraju biti kompenzirani s pomoću negativnih članova. Ovo znači da je nelinearni vremenski nepromjenljivi induktivitet element mreže u kojem je pretvorba djelatne snage na frekvenciji *moguća*.

Na analogni način bi se zbog $P_C = 0$ i $I_C(0) = 0$ dobilo da za svaki nelinearni vremenski nepromjenljivi kapacitet vrijedi da je

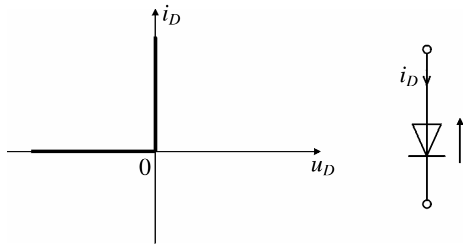
$$\sum_{n=1}^{\infty} P_C(n) = 0 \qquad (11b)$$

Budući da je istosmjerna snaga nelinearnih vremenski nepromjenljivih reaktivnih elemenata jednaka nuli, ovi se elementi mreže *ne mogu upotrijebiti* ni u jednoj pretvorbi snaga na frekvenciji gdje se zahtijeva *nenulta istosmjerna snaga*.

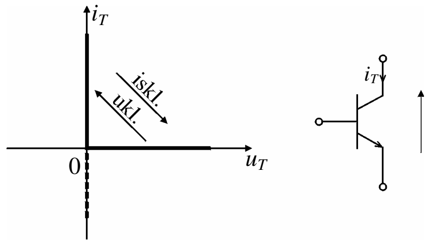
Primjer: *Ne može se izvesti ispravljač* u kome bi se kao fizičke komponente (naprave) upotrijebile *samo* nelinearne reaktivne komponente (prigušnice, transformatori, kondenzatori).

15.2.3 Nelinearni disipativni elementi (otpori)

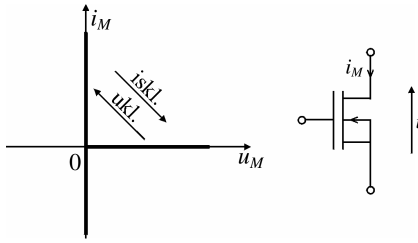
Mogućnosti pretvorbe djelatne snage na frekvenciji *ovise isključivo o karakteristici otpora*. Pokažimo to na nekoliko karakterističnih primjera:



Sl.15.1.a Karakteristika idealne diode.



Sl.15.1.b Karakteristika idealnog bipolarnog tranzistora u sklopnom načinu rada.



Sl.15.1.c Karakteristika idealnog MOSFET-a u sklopnom načinu rada.

a) ***Idealna dioda***. Zbog $u_D \cdot i_D = 0, \ \forall t,$ proizlazi da je djelatna snaga $P_D = 0$. U svim netrivijalnim režimima rada uvijek u skladu s karakteristikom $I_D(0) > 0$ i $U_D(0) < 0$, što znači da je prema (5) :

$$P_D(0) < 0 \ ; \ \tilde{P}_D = |P_D(0)| > 0 \qquad (12)$$

Idealna dioda je element mreže u kojem se ***sva izmjenična snaga*** raspoloživa na njenim priključcima ***pretvara (transformira) u istosmjernu snagu***. Obrat nije moguć.

b) ***Idealni bipolarni tranzistor***. Rad u III. kvadrantu u_T-i_T karakteristike nije dopušten. Zbog toga je u svim netrivijalnim režimima rada $U_T(0) > 0$, ali i $I_T(0) > 0$, što znači da je *istosmjerna snaga* idealnog bipolarnog tranzistora *pozitivna*. U sklopnom načinu rada je $u_T \cdot i_T = 0, \ \forall t$, što znači da je $P_T = 0$. U skladu sa (5) proizlazi da je

$$P_T(0) > 0 \ ; \ \tilde{P}_T = -P_T(0) < 0 \tag{13}$$

Idealni bipolarni tranzistor je element mreže u kojem se ***sva istosmjerna snaga*** raspoloživa na njegovim energetskim priključcima ***pretvara (transformira) u izmjeničnu snagu***. Obrat nije moguć. Idealni bipolarni tranzistor je dodatno *kvaziaktivni* i *vremenski promjenljivi otpor* što mu omogućuje da *upravlja iznosom transformirane snage* (poglavlje 2).

Opažamo da se ne može izvesti ispravljač u kojem bi se kao komponente za pretvorbu djelatne snage upotrijebili *samo* bipolarni tranzistori!

c) ***Idealni MOSFET***. Iz karakteristike idealnog MOSFET--a lako zaključujemo da je $U_M(0) > 0$, ali i da je $I_M(0) \gtrless 0$, što znači da u sklopnom načinu rada vrijedi da je

$$P_M(0) \gtrless 0 \ ; \ \tilde{P}_M = -P_M(0) \tag{14}$$

Idealni MOSFET je element mreže u kojem je moguća pretvorba ***istosmjerne snage u izmjeničnu i obratno***. MOSFET je *kvaziaktivni* i *vremenski promjenljivi otpor* što mu omogućuje da *upravlja iznosom transformirane snage*.

15.3 ZAKON O OČUVANJU DJELATNIH SNAGA NA FREKVENCIJI

Jedan od načina iskazivanja zakona o očuvanje energije u nekoj električkoj mreži koja se sastoji od b grana jest s pomoću snaga, i to ili s pomoću trenutnih snaga grana

$$\sum_{\alpha=1}^{b} u_\alpha i_\alpha = 0$$

kako je pokazano u poglavlju 1, ili s pomoću srednjih (djelatnih) snaga grana

$$\sum_{\alpha=1}^{b} \frac{1}{T} \int_0^T u_\alpha i_\alpha dt = \sum_{\alpha=1}^{b} P_\alpha = 0 \tag{15}$$

Ovi iskazi *vrijede uvijek*, a u poglavlju 12 pokazano je to na jednom posebnom slučaju, tzv. sinusoidalnom ustaljenom stanju.

Pokažimo da zakon o očuvanju djelatne snage (15) ***ne vrijedi samo globalno***, nego i za ***svaku njenu komponentu*** na bilo kojoj frekvenciji $\omega_n = n\omega$; n=0,1,2,3,...

U dokazu ove tvrdnje prisjetimo se Tellegenovog teorema, za koji znamo da vrijedi ako vrijede Kirchhoffovi zakoni. Znači da je dovoljno pokazati da Kirchhoffovi zakoni vrijede za komponente rastava valnih oblika napona i struje u Fourierov red. Kako je

$$\sum_{\alpha=1}^{b} a_{j\alpha} i_\alpha(t) = 0 \text{, za } j\text{-ti čvor, odnosno}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{b} b_{j\alpha} u_\alpha(t) = 0 \text{, za } j\text{-tu petlju}$$

to analogni izrazi, u skladu s izloženim u poglavlju 1, vrijede za njihove *linearne transformate*, izrazi (2) i (3), dakle

$$\sum_{\alpha=1}^{b} a_{j\alpha} \hat{I}_\alpha(n) = 0 \ ; \ \sum_{\alpha=1}^{b} a_{j\alpha} \hat{J}_\alpha(n) = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{b} b_{j\alpha} \hat{U}_\alpha(n) = 0 \ ; \ \sum_{\alpha=1}^{b} b_{j\alpha} \hat{V}_\alpha(n) = 0$$

i to za svaki j-ti čvor, svaku j-tu petlju i za svaki n=0,1,2,..
U skladu s Tellegenovim teoremom ovo znači da je

$$\sum_{\alpha=1}^{b} \hat{U}_\alpha(n) \hat{I}_\alpha(n) = 0 \ ; \ \sum_{\alpha=1}^{b} \hat{V}_\alpha(n) \hat{J}_\alpha(n) = 0 \ ; \ \text{n} = 0,1,2,...$$

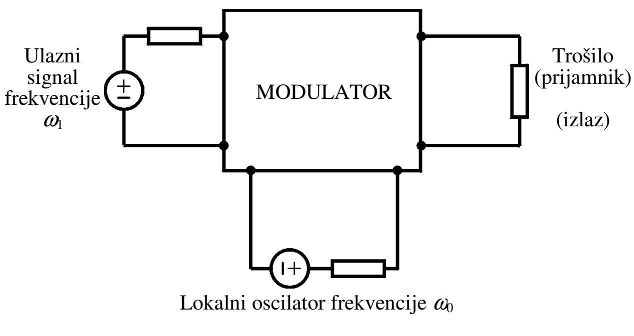
što znači da je polazna tvrdnja dokazana, tj. da je

$$\sum_{\alpha=1}^{b} P_\alpha(n) = 0 \ ; \ n = 0,1,2,... \tag{16}$$

Dakle, ako se *neki element* mreže u mreži ponaša kao *izvor* na frekvenciji ω_n, *neki drugi element* mreže u toj mreži mora biti *trošilo* na toj frekvenciji!

15.4 MANLEY-ROWE JEDNADŽBE (1956.)

U primjenama, posebno u telekomunikacijama, često se koriste *modulatori*. Sa stajališta teorije mreža, to su troprilazi, kao što to prikazuje slika 15.2. Pri tome se

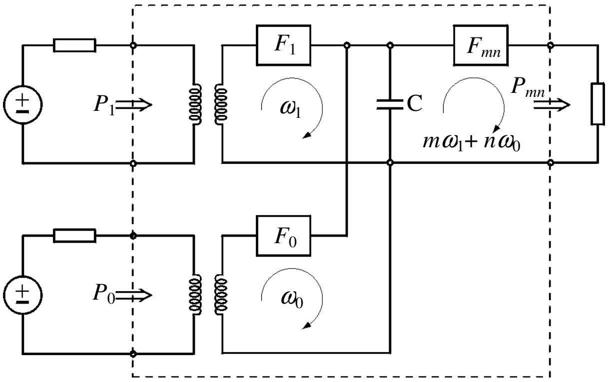


Sl.15.2 Načelna shema spoja modulatora.

obično energetski izvor iz kojeg se napaja modulator, tzv. *lokalni oscilator frekvencije* ω_0 promatra kao sastavni dio modulatora. Od modulatora se traži da *preda više snage* trošilu no što je primio na ulazu.

Napomena: Svako pojačalo je prema tome modulator. Ako je izvor napajanja istosmjeran (lokalni oscilator frekvencije ω_0=0), u idealnom će slučaju izlazni signal (signal na trošilu) biti replika ulaznog signala. U protivnom, ako se modulator napaja iz lokalnog oscilatora frekvencije $\omega_0 \neq 0$ izlaz neće biti replika ulaza. Pojavit će se nove frekvencije budući da modulator sadrži nelinearne komponente.

Analizirajmo *energetske odnose* u najjednostavnijem mogućem modulatoru, slika 15.3, koji se sastoji od nelinearnog kapaciteta C i idealnih filtara F_1, F_0 i F_{mn} koji propuštaju signale na frekvencijama ω_1, ω_0 i $m\omega_1+n\omega_0$, gdje su m i n cijeli brojevi, a sve signale na drugim frekvencijama ne propuštaju.



Sl.15.3 Shema spoja modulatora s nelinearnim kapacitetom.

Pretpostavimo da su frekvencije ω_1 i ω_0 ***međusobno nezavisne***. Ovo znači da se u krugu trošila mogu pojaviti sve *kombinacijske frekvencije*

$$\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_0$$

gdje su m i n cijeli brojevi. S obzirom na pretpostavljena idealna svojstva filtara, vrijedit će u skladu sa zakonom o očuvanju energije da je

$$P_1 + P_0 + P_{mn} = 0$$

što se može napisati u obliku

$$\omega_1 \frac{P_1}{\omega_1} + \omega_0 \frac{P_0}{\omega_0} + (m\omega_1 + n\omega_0) \cdot \frac{P_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_0} =$$
$$= \omega_1\left(\frac{P_1}{\omega_1} + \frac{mP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_0}\right) + \omega_0\left(\frac{P_0}{\omega_0} + \frac{nP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_0}\right) = 0$$

Budući da su ω_1 i ω_0 nezavisni, to se navedeni izraz može zadovoljiti za po volji kombinaciju frekvencija samo ako je:

$$\frac{P_1}{\omega_1} + \frac{mP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0 \;;\; \frac{P_0}{\omega_0} + \frac{nP_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_0} = 0 \qquad (17)$$

To su *Manley-Rowe jednadžbe* za slučaj triju frekvencija. U praksi su posebno zanimljiva dva slučaja:

a) $\boldsymbol{m = n = 1 \;;\; \omega_0 > \omega_1}$
Označimo da je $P_{11}=P_+$. Tada je prema (17)

$$\frac{P_1}{\omega_1} + \frac{P_+}{\omega_1 + \omega_0} = 0 \;;\; \frac{P_0}{\omega_0} + \frac{P_+}{\omega_1 + \omega_0} = 0 \qquad (18)$$

U skladu sa slikom 15.3, očigledno je $\boldsymbol{P_+ < 0}$, tj. modulator predaje snagu trošilu. Ovo međutim znači da je u skladu s izrazima (18) $\boldsymbol{P_1 > 0}$, ali isto tako i $\boldsymbol{P_0 > 0}$, što znači da oba izvora daju energiju izlaznom krugu.

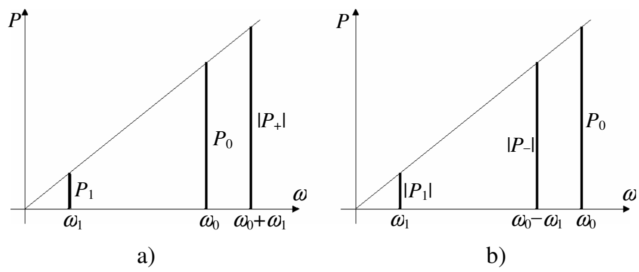
$$|P_+| = P_0 + P_1 \;;\; P_0 = \frac{\omega_0}{\omega_1} P_1$$

b) $\boldsymbol{m = -1 \;;\; n = 1 \;;\; \omega_0 > \omega_1}$
Označimo da je $P_{-11}=P_-$. Tada je prema (17)

$$\frac{P_1}{\omega_1} - \frac{P_-}{\omega_0 - \omega_1} = 0 \;;\; \frac{P_0}{\omega_0} + \frac{P_-}{\omega_0 - \omega_1} = 0 \qquad (19)$$

I u ovom slučaju je očigledno $\boldsymbol{P_- < 0}$, ali je prema (19) zbog toga $\boldsymbol{P_0 > 0}$ i $\boldsymbol{P_1 < 0}$. Opažamo da lokalni oscilator daje energiju izlaznom krugu, ali i ulaznom krugu. Ovo znači da nelinearni kapacitet prima energiju na frekvenciji lokalnog oscilatora ω_0 i vraća dio energije generatoru signala. Ovo je isto kao da je u ulazni krug *uveden negativni otpor* koji nadmašivši pozitivne otpore generatora ulaznog signala može dovesti do nestabilnosti rada modulatora (*Hartleyev efekt*, 1917.)

$$P_0 = |P_1| + |P_-| \;;\; |P_1| = \frac{\omega_1}{\omega_0} P_0 \qquad (20)$$



Sl.15.4 Odnosi snaga i frekvencija za
a) $m = n = 1$; $\omega_0>\omega_1$
b) $m = -1$; $n = 1$; $\omega_0>\omega_1$.