XVI. PREDAVANJE

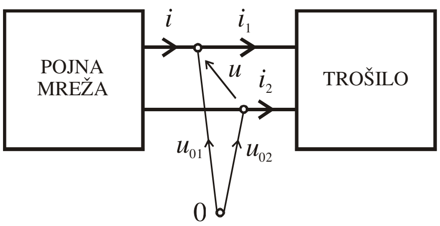
Invarijantnost trenutne i djelatne snage. Invarijantnost djelatne i jalove snage na frekvenciji. Neinvarijantnost prividne snage. Dogovor o referentnoj točki. Ortogonalne komponente i nezavisnost energetskih procesa. Jalova snaga. Snaga distorzije. Raspršena snaga. Razlozi zbog kojih je prividna snaga veća od djelatne snage. Djelatna snaga i pojam ekvivalentne vodljivosti jednoprilaza. Primjer rastava prividne snage na komponente u linearnoj višeharmonijskoj mreži. Rastav prividne snage na komponente prema Budeanuu. Nefizikalnost rastava. Rastav prividne snage na komponente prema Fryzeu. Uvjet *p*(*t*) < 0 dovoljan je, ali ne i nužan za pojavu jalove snage.

16. ENERGETSKI ODNOSI – PRIVIDNA SNAGA

16.1 INVARIJANTNOST IZRAZA ZA SNAGU

Jedno od temeljnih svojstava svakog fizikalno smislenog pojma u elektrotehnici jest da njegova definicija ne ovisi o *odabranom sustavu referencija*, tj. traži se *invarijantnost* izraza koji definiraju taj pojam.

Pokažimo da to vrijedi za pojmove trenutne i srednje snage. Analizu ćemo provesti za jednoprilaznu višeharmonijsku izmjeničnu mrežu, slika 16.1. Uzrok zbog kojeg je mreža višeharmonijska nije bitan, što znači da mreža može biti *nelinearna* kao i *vremenski promjenljiva*.



Sl. 16.1 Analizirana jednoprilazna mreža (0 – referentna točka po volji).

Neka je napon na prilazu oblika

$$u = \sqrt{2}\sum_{n\in N} U(n)\sin(n\omega t + \alpha_n) \qquad (1)$$

gdje je sa *N* označen konačni skup harmonijskih članova u naponu reda *n*, a struja prilaza

$$i_1 = -i_2 = i = \sqrt{2}\sum_{n\in M\cup N} I(n)\sin(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n) \qquad (2)$$

gdje je sa *M* označen konačni skup harmonijskih članova struje reda *n*, koji nisu prisutni u skupu *N*.

Napomena: Skup *M* ima članove (nije prazan skup) samo u slučajevima kada je pojna mreža modelirana *idealnim* izvorom.

16.1.1 Trenutna snaga

U skladu s oznakama na slici 16.1 vrijedi izraz za trenutnu snagu

$$p = u_{01}\, i_1 + u_{02}\, i_2$$

Budući da su točke 1 i 2 priključci prilaza to je

$$i_1 + i_2 = 0\,;\quad i_1 = i$$

a budući da je i

$$u = u_{01} - u_{02}$$

proizlazi izraz

$$p = u_{01} i_1 + u_{02}(-i_1) = (u_{01} - u_{02}) i_1 = u\cdot i \qquad (3)$$

što znači da izraz za *trenutnu snagu ne ovisi* o izboru referentne točke 0!

16.1.2 Srednja (djelatna) snaga

Srednja snaga ili uobičajenije djelatna snaga *P* jest linearni transformat trenutne snage, tj.

$$P = \frac{1}{T}\int_o^T p dt = \frac{1}{T}\int_o^T (u_{01} i_1 + u_{02} i_2)\, dt = \frac{1}{T}\int_o^T ui\, dt$$

pa je očigledno da niti izraz za *djelatnu snagu ne ovisi* o izboru referentne točke 0.

16.1.3 Djelatna i jalova snaga na frekvenciji

Rastavimo djelatnu snagu na komponente, ili kako je to pokazano u poglavlju 15.1 ili koristeći izraze (1) i (2), dobivamo da je

$$P = \sum_{n\in N} P(n) = \sum_{n\in N} U(n) I(n) cos\varphi_n \qquad (4)$$

gdje je sa

$$P(n) = U(n) I(n) cos\varphi_n \qquad (5)$$

označena djelatna snaga jednoprilaza na frekvenciji $\omega_n = n\ \omega$.

Budući da je određivanje Fourierovih koeficijenata linearna transformacija nad varijablama *u*(*t*) i *i*(*t*), to će i za *svaku komponentu djelatne snage* vrijediti da izraz (5), kojim je definirana, *ne ovisi* o izboru referentne točke 0.

Uvedimo pojam ***jalove snage na frekvenciji***

$$Q(n) = U(n)I(n)sin\varphi_n \qquad (6)$$

Po analogiji, lako zaključujemo da niti ovaj izraz *ne ovisi* o izboru referentne točke 0.

16.1.4 Prividna snaga

Prividna snaga jednoprilaza definirana je izrazom:

$$S = U \cdot I = \sqrt{\sum_{n\in N} U^2(n)} \cdot \sqrt{\sum_{n\in N\cup M} I^2(n)} \qquad (7)$$

Kao što znamo iz poglavlja 1, za efektivne vrijednosti *ne vrijedi* KZN, dakle

$$U \neq U_{01} - U_{02}$$

što znači da izraz za *prividnu snagu ovisi* o izboru referentne točke 0. Proizlazi da je prividna snaga ***dogovorna veličina***. U njenoj definiciji mora biti navedena referentna točka. Logičan zaključak, da zbog tog razloga prividna snaga nije fizikalno smislen pojam, ipak nije točan.

Iz poglavlja 12 znamo da je prividna snaga jednoprilaza ona najveća djelatna snaga koja bi se mogla na tom prilazu postići uz dane efektivne vrijednosti napona U i struje I jednoprilaza. Da bi se očuvala ova fizikalna smislenost pojma prividne snage, u elektrotehnici je *dogovorena* sljedeća definicija trenutne snage:

Trenutna snaga jednoprilaza jednaka je umnošku trenutne vrijednosti napona između jednog priključka jednoprilaza i drugog priključka shvaćenog kao referentni priključak, i trenutne struje kroz prvi priključak.

Time je očuvan fizikalni smisao svih dosada navedenih pojmova snage jednoprilaza.

16.2 RASTAV PRIVIDNE SNAGE NA KOMPONENTE (L. Czarnecki, 1985.)

Rastav prividne snage na komponente ima smisla samo ako se na taj način prepoznaju i izdvoje oni energetski procesi zbog kojih je prividna snaga *S veća* od djelatne snage *P* jednoprilaza. Također rastav mora biti takav da se u jednoharmonijskoj mreži svede na rastav

$$S^2 = P^2 + Q^2 = (U \cdot I\, cos\varphi)^2 + (U \cdot I\, sin\varphi)^2$$

poznat iz Osnova elektrotehnike.

16.2.1. Osnovna ideja

Energetski se procesi mogu prepoznati ako se pri zadanom naponu jednoprilaza $u(t)$, izraz (1), struja jednoprilaza $i(t)$, izraz (2), rastavi na *ortogonalne komponente.*

Ortogonalnost implicira *nezavisnost* energetskih procesa. Za energetske procese (pretvorba u drugi oblik, uskladištenje energije) mjerodavan je *kvadrat amplitude* struje ili napona. (Sjetimo se definicije efektivne vrijednosti!). S druge strane, energetski procesi uzrokovani, recimo dvjema strujama $i_x(t)$ i $i_y(t)$ koje istodobno djeluju u nekom promatranom krugu nezavisni su ako vrijedi da je

$$\int_0^T (i_x + i_y)^2\,dt = \int_0^T (i_x^2 + i_y^2)\,dt$$

u periodi rada T. Tada je rezultantni energetski efekt jednak zbroju energetskih efekata od svake struje uzetog pojedinačno. No, to je moguće samo ako je

$$\int_0^T i_x i_y\,dt = 0$$

što je i definicija ortogonalnosti dviju funkcija $i_x(t)$ i $i_y(t)$ na periodi T.

16.2.2 Jalova snaga i snaga distorzije

Ako u izrazu (2) za struju jednoprilaza faktor $\sin(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)$ rastavimo u dvije ortogonalne komponente, tj.

$$\sin(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n) =$$
$$= \cos\varphi_n \sin(n\omega t + \alpha_n) - \sin\varphi_n \cos(n\omega t + \alpha_n)$$

odmah opažamo da se struja $i(t)$ može rastaviti u tri ortogonalne komponente

$$i = i_R + i_r + i_D$$

gdje je

$$i_R = \sqrt{2}\sum_{n\in N} I(n)\cos\varphi_n \sin(n\omega t + \alpha_n)$$
$$i_r = -\sqrt{2}\sum_{n\in N} I(n)\sin\varphi_n \cos(n\omega t + \alpha_n)$$
$$i_D = \sqrt{2}\sum_{n\in M} I(n)\sin\varphi_n \sin(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)$$

Zbog međusobne ortogonalnosti vrijedit će da je

$$I^2 = \sum_{n\in N} I^2(n)\cos^2\varphi_n + \sum_{n\in N} I^2(n)\sin^2\varphi_n + \sum_{n\in M} I^2(n) \qquad (8)$$

Zaključujemo da komponenta struje $i_r(t)$ postoji samo tada ako na prilazu postoje *harmonijski članovi struje pomaknuti za* ± 90° *el.* u odnosu spram odgovarajućih harmonijskih članova napona. U skladu s terminologijom iz Osnova elektrotehnike, ovo znači da postoje *jalove struje* na frekvencijama ω_n, a time i jalove snage $Q(n)$ na frekvenciji.

Snaga pridružena ovim strujama naziva se ***jalova snaga*** i definirana je izrazom

$$S_x^2 = \sum_{n \in N} U^2(n) \cdot \sum_{n \in N} I^2(n) sin^2 \varphi_n = U^2 \cdot \sum_{n \in N} \left[\frac{Q(n)}{U(n)} \right]^2 \qquad (9)$$

Time je prepoznat jedan od razloga zašto je $S > P$.

Komponenta $i_D(t)$ postoji ako je mreža nelinearna i/ili vremenski promjenljiva te ako na prilazu djeluje idealni izvor. Komponenta $i_D(t)$ naziva se strujom distorzije a pripadna snaga ***snaga distorzije***:

$$S_D^2 = \sum_{n \in N} U^2(n) \cdot \sum_{n \in M} I^2(n) \qquad (10)$$

Time je prepoznat i drugi od razloga zašto je $S > P$.

16.2.3 Djelatna snaga i raspršena snaga

U preostaloj komponenti struje

$$i_R(t) = \sqrt{2} \sum_{n \in N} I(n) \cos \varphi_n \sin(n\omega t + \alpha_n)$$

skriven je onaj dio valnog oblika struje koji je *jedini* odgovoran za pojavu djelatne snage. Ovo znači da se struja $i_R(t)$ sigurno može rastaviti u dvije komponente

$$i_R = i_a + i_s$$

gdje je

$$\frac{1}{T}\int_0^T u i_a dt = P \ ; \quad \frac{1}{T}\int_0^T u i_s dt = 0 \, ; \quad \frac{1}{T}\int_0^T i_a i_s dt = 0 \qquad (11)$$

pa su i te dvije komponente struje međusobno ortogonalne.

Struja $i_a(t)$ naziva se *djelatna struja* i očigledno je jednaka

$$i_a = G_e u \ ; \quad G_e = \frac{P}{U^2} \qquad (12)$$

gdje je sa G_e označena ***ekvivalentna vodljivost jednoprilaza*** na kojoj se disipira djelatna snaga P.

Razliku struja

$$i_s = i_R - i_a = \sqrt{2} \sum_{n \in N} (G_n - G_e) U(n) \sin(n\omega t + \alpha_n)$$

Czarnecki je nazvao *raspršena struja*. Sa

$$G_n = \frac{I(n) cos \varphi_n}{U(n)} \qquad (13)$$

označena je *vodljivost jednoprilaza za n-ti harmonijski član.* U prijenosu energije od izvora prema trošilu komponenta struje $i_s(t)$ je nekorisna, ona je treći od razloga zašto je $S > P$. Pripadna snaga naziva se ***raspršena snaga***:

$$D_s^2 = U^2 \cdot \sum_{n \in N} (G_n - G_e)^2 U^2(n) \qquad (14)$$

Pridjev "raspršena" podsjeća na to da ova snaga postoji samo onda ako su vodljivosti trošila (prilaza) G_n "raspršene" oko ekvivalentne vodljivosti G_e.

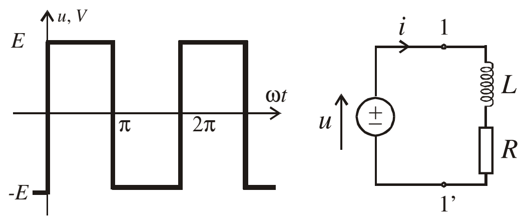
16.2.4 Komponente prividne snage

$$S^2 = P^2 + D_s^2 + S_x^2 + S_D^2 \qquad (15)$$

Raspršena snaga D_s i jalova snaga S_x mogu se u energetskim mrežama kompenzirati s pomoću *reaktivnih komponenata.* Snaga distorzije S_D se na taj način *ne može* kompenzirati.

16.2.5 Primjer rastava prividne snage na komponente

Odredimo prividnu snagu izvora i komponente prividne snage za mrežu sheme spoja prema slici 16.2, ako je E = 10V, $R = \omega L$ = 1Ω.



Sl. 16.2 Primjer linearne višeharmonijske mreže.

Valni oblik napona $u(t)$ može se prikazati Fourierovim redom

$$u(t) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} U(n) \sin n\omega t \ ; \quad U(n) = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n} \ ; \quad n = 1,3,5,...$$

dok je admitancija jednoprilaza

$$Y(jn\omega) = \frac{1}{R + jn\omega L} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{1 + jn} = G_n + jB_n$$

pri čemu je

$$G_n = \frac{1}{R}\frac{1}{1+n^2} \ ; \quad B_n = -\frac{1}{R}\frac{n}{1+n^2}$$

S obzirom na to da je mreža linearna i vremenski nepromjenljiva, skup M je prazan skup, te je snaga distorzije jednaka nuli, tj. $S_D = 0$.

a) ***Djelatna snaga****.* U skladu sa (4), te uzevši u obzir (13), vrijedi da je

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} G_n U^2(n) = \frac{8}{\pi^2}\frac{E^2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+n^2)} \tag{16}$$

Prema literaturi [15] je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+n^2)} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}th\frac{\pi}{2}$$

što uvršteno u (16) daje izraz za djelatnu snagu

$$P = \frac{E^2}{R}\left(1 - \frac{2}{\pi}th\frac{\pi}{2}\right) = UI_a = EI_a \tag{17}$$

b) ***Prividna snaga***. Efektivna vrijednost napona je $U = E$. Efektivnu vrijednost struje I odredimo iz izraza za efektivnu vrijednost djelatne struje, koja je prema (12) jednaka

$$I_a = G_e U = \frac{P}{U^2}U = \frac{RI^2}{U}$$

odakle proizlazi da je

$$I = \sqrt{\frac{U}{R}I_a} = \frac{E}{R}\sqrt{\left(1 - \frac{2}{\pi}th\frac{\pi}{2}\right)}$$

odnosno prividna snaga

$$S = UI = \frac{E^2}{R}\sqrt{\left(1 - \frac{2}{\pi}th\frac{\pi}{2}\right)} \tag{18}$$

c) ***Jalova snaga***. Ako se analogno izrazu (13) uvede da je

$$B_n = \frac{I(n)\sin\varphi_n}{U(n)}$$

jalova struja bit će dana izrazom

$$I_r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n U^2(n) = \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{E^2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2}$$

Prema literaturi [15] je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2} = \frac{\pi}{8}th\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{ch^2\frac{\pi}{2}}$$

što uvršteno u prethodni izraz i pomnoženo s efektivnom vrijednošću $U = E$ daje jalovu snagu

$$S_x = \frac{E^2}{R}\sqrt{\frac{1}{\pi}th\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2ch^2\frac{\pi}{2}}} \tag{19}$$

d) ***Raspršena snaga***. U skladu s izrazom (15) vrijedi da je

$$D_s = \sqrt{S^2 - P^2 - S_x^2} \tag{20}$$

e) ***Komponente prividne snage***. Uvrste li se u izraze (17) do (20) zadane vrijednosti E = 10V, $R = \omega L$ = 1Ω proizlazi da je: S = 64,5VA; P = 41,6W; S_x = 46,1VA; D_s = 17,4VA; S_D = 0VA.

16.3 KLASIČNI RASTAV PRIVIDNE SNAGE U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

(C. I. Budeanu, 1927.)

Iz poglavlja 16.1 znamo da je izraz za djelatnu snagu invarijantan s obzirom na po volji odabranu referentnu točku a isto vrijedi i za svaku njenu komponentu, tj. za djelatnu snagu na svakoj frekvenciji.

$$P = \sum_{n\in N} P(n) = \sum_{n\in N} U(n)I(n)cos\varphi_n$$

Isto vrijedi i za jalovu snagu na svakoj frekvenciji. Svaki od tih pojmova, P, $P(n)$ i $Q(n)$ ima jasni fizikalni smisao. Zbog toga Budeanu uvodi pojam *jalove snage*

$$Q_B = \sum_{n\in N} Q(n) = \sum_{n\in N} U(n)I(n)sin\varphi_n \tag{21}$$

vjerujući da ima fizikalni smisao. Lako uviđamo da je to posve pogrešno. Naime, promatramo li trenutnu snagu za svaki harmonijski član posebno, bit će prema poglavlju 12 zbog

$$u_n = \sqrt{2}\cdot U(n)\sin(n\omega t + \alpha_n)$$
$$i_n = \sqrt{2}\cdot I(n)\sin(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n)$$

trenutna snaga dana izrazom

$$p_n = u_n i_n = P(n)[1 + \cos 2(n\omega t + \alpha_n)] + Q(n)\sin 2(n\omega t + \alpha_n)$$

te $Q(n)$ za svaku frekvenciju $n\omega$ može imati različiti fazni kut α_n. Dok $Q(n)$ pokazuje za svaku frekvenciju kolika je amplituda izmjenične trenutne snage $\tilde{p}_n$, *njihov zbroj ne znači ništa* slično, budući da Q_B *nije* amplituda izmjenične trenutne snage $p(t)$!

Dodatno, jer je

$$S^2 > P^2 + Q_B^2$$

Budeanu uvodi novu komponentu rastava prividne snage, *snagu distorzije* D_B

$$D_B^2 = S^2 - P^2 - Q_B^2 \tag{22}$$

Interesantno je to da se ovaj rastav iako potpuno nekoristan i zbunjujući održao do danas. Koristeći taj rastav nikakva smislena kompenzacija komponenata prividne snage nije moguća. Tako primjerice prema

Budeanuu je za kompenzaciju jalove snage dovoljno da bude

$$Q_B = \sum_{n\in N} Q(n) = 0$$

dok je u stvarnosti, prema (9), nužno da bude

$$S_x = U\sqrt{\sum_{n\in N}\left[\frac{Q(n)}{U(n)}\right]^2} = 0$$

tj. za svaki n mora biti $Q(n) = 0$ da bi kompenzacija jalove snage bila moguća.

16.4 KLASIČNI RASTAV PRIVIDNE SNAGE U VREMENSKOM PODRUČJU (S. Fryze, 1932.)

Koristeći jednakost Cauchy-Bunjakovskoga (2.10), Fryze uvodi pojam jalove snage

$$Q_F^2 = \frac{1}{2T^2}\int_0^T\int_0^T [u(t)i(\tau) - u(\tau)i(t)]^2\, dt\, d\tau \qquad (23)$$

i pokazuje da u svakoj mreži, osim mreža s linearnim vremenski nepromjenljivim otporima, uvijek postoji jalova snaga. Naime, iz (23), kako je to pokazano u odsječku 2.3.1 proizlazi da je $Q_F = 0$ samo ako je na priključcima jednoprilaza

$$\frac{u(t)}{i(t)} = R = konst. \qquad (24)$$

dakle, *ako vrijedi Ohmov zakon*.

Važnost Fryzeovog rastava je u tome što je dao *nužan i dovoljan uvjet* koji mora biti zadovoljen da bi u nekoj mreži na nekom prilazu bio $S > P$!

U poglavlju 12 pokazano je da ako je u nekom dijelu periode rada T, $p(t) < 0$, da to znači da na tom prilazu dolazi do energetske razmjene između dva dijela mreže povezanih tim prilazom. Pojna mreža se u podintervalima periode rada ponaša kao trošilo. Mjera za to je amplituda titraja snage Q!

Fryzeova analiza jasno pokazuje da je uvjet $p(t) < 0$ *dovoljan, ali ne i nužan uvjet* za pojavu jalove snage. To znači da postoje mreže u kojima je $p(t) \geq 0$, $\forall t$, a da i dalje postoji jalova snaga.

Uvjet opstojnosti jalove snage na primjeru serijskog *RLC*-kruga iz poglavlja 12 proizlazi ako se napiše kvocijent

$$\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}\frac{\cos\omega t}{\cos(\omega t + \varphi)}$$

što je očigledno vremenska funkcija. Jalova snaga postoji jer nije zadovoljen uvjet (24).