XVII. PREDAVANJE

Pojam jednadžbi mreže. Skup linearnih jednadžbi. Skup konstitutivnih relacija grana. Osnovni topološki pojmovi: čvor, grana, graf. Pojam petlje. Interpretacija KZN-a. Pojam reza. Objašnjenje pojma reza elektrotehničkim pojmovima. Kirchhoffov zakon struje za rez. Pojam stabla i spojnica. Temeljni teorem teorije grafova. Pojam temeljne petlje i temeljnog reza. Skup nezavisnih jednadžbi KZS-a. Skup nezavisnih jednadžbi KZN-a. Pojam normalne grane. Različiti načini zapisa jednadžbi mreže: jednadžbe struja petlji, jednadžbe napona čvorova.

V. JEDNADŽBE MREŽE

U širem smislu shvaćena analiza neke mreže obuhvaća nekoliko jasno odvojenih faza. To su:

a) identifikacija problema,
b) modeliranje mreže,
c) ***opis mreže jednadžbama***,
d) ***rješavanje jednadžbi mreže*** analitičkim ili numeričkim postupkom, i
e) vrednovanje rezultata

U užem smislu shvaćena analiza neke mreže, a to i jest glavni predmet teorije mreža, obuhvaća postavljanje i rješavanje jednadžbi mreže. Pri tome pod ***jednadžbama mreže*** smatramo skup jednadžbi rješenjem kojih dobivamo valne oblike napona i struje na svakom elementu mreže. Ostale faze analize *nisu* predmet teorije mreža.

Jednadžbe mreže sastoje se od *dva skupa jednadžbi*. Prvi skup tvori ***skup linearnih jednadžbi*** koje proizlaze iz primjene Kirchhoffovih zakona. Elementi mreže u tom skupu nisu bitni, bitan je samo način kako su ti elementi spojeni tvoreći analiziranu mrežu. Drugi skup tvori ***skup konstitutivnih relacija*** grana mreže. Način na koji su te grane spojene nije bitan, bitna su samo svojstva elemenata mreže koji tvore svaku od grana. Konstitutivne relacije elemenata mreže mogu biti opisane linearnim ili nelinearnim funkcijama u kojima može biti iskazana vremenska promjenljivost odnosno vremenska nepromjenljivost elemenata mreže.

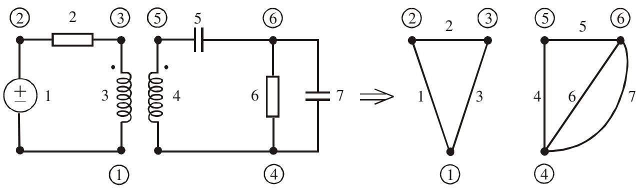
Zapis prvog skupa jednadžbi, tj. sustava linearnih jednadžbi koji proizlazi iz primjene Kirchhoffovih zakona jest trivijalan ako se radi o analizi krugova, tj. mreža s malim brojem grana i čvorova. Za mreže s većim brojem grana i čvorova (recimo: stotinjak grana i čvorova) zadaća zapisa ovog skupa jednadžbi postaje vrlo složena i potrebno je pronaći postupak sustavnog zapisa ovog skupa jednadžbi mreže. U tu svrhu koriste se rezultati *topologije,* jedne od matematičkih disciplina.

17. OSNOVE TOPOLOGIJE ELEKTRIČKIH MREŽA

17.1 OSNOVNI POJMOVI

- ***Topologija***. Grana matematike koja se bavi onim *svojstvima geometrijskih tvorevina* koja *ostaju očuvana* ako se geometrijske tvorevine *deformiraju*, ali tako da se ne raskine ništa što je bilo spojeno, niti ne spoji ono što je bilo rastavljeno.

  Električka mreža se sastoji od određenog broja međusobno spojenih elemenata. Budući da topološka svojstva električke mreže ne ovise o svojstvima elemenata koji tvore tu mrežu, to je za analizu topoloških svojstava dovoljno zamijeniti ju skupom *čvorova* i skupom linijskih segmenata koje zovemo *granama*.
- ***Čvor***. Mjesto spoja dvaju ili više elemenata mreže.
- ***Grana***. Dio mreže koji se sastoji od jednog ili više elemenata mreže tvoreći jednoprilaz. Svaka grana na oba kraja završava čvorom. Model naprave sa *m* priključaka predočen je s pomoću onoliko grana koliko model naprave ima prilaza.
- ***Graf (mreže)***. Prikaz mreže s pomoću čvorova i grana pri čemu su sve grane predočene linijskim segmentima a svi čvorovi točkama. Grafom se smatra i čvor na koji nije spojena niti jedna grana.



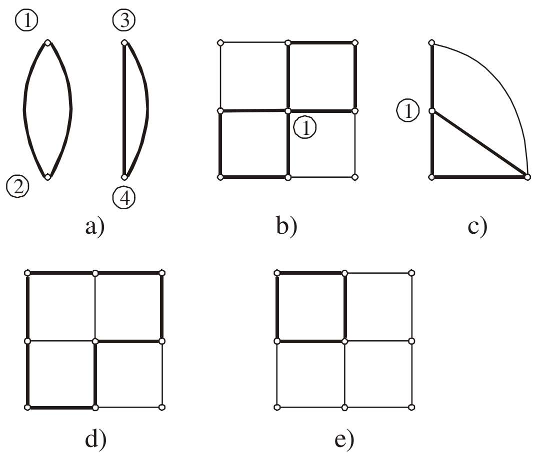
Sl. 17.1 Primjer električke mreže i pridruženog grafa.

Jednoj mreži moguće je pridružiti više grafova. Primjerice, na slici 17.1 očigledno je da se, recimo, mogao izbaciti čvor 2 te bi između čvorova 1 i 3 postojale samo dvije paralelne grane. Slično tome, grane 6 i 7 su se mogle sažeti u jednu granu. *Zaključujemo* da pridruživanje grafa zadanoj mreži *nije jednoznačno*.

- ***Podgraf (subgraf).*** Podskup čvorova i grana nekog grafa
- ***Orijentirani graf.*** Graf u kojem su granama pridodani referentni smjerovi (recimo: struja).
- ***Put.*** Niz grana u grafu. Put može biti *otvoren* ili *zatvoren*.
- ***Povezani (suvisli) graf.*** Graf u kojem postoji barem jedan put između bilo koja dva čvora grafa. Graf na slici 17.1 nije povezani graf.

17.2 POJMOVI PETLJE I REZA

- ***Petlja***. Povezani podgraf nekog grafa sa svojstvom da su samo po dvije grane tog podgrafa spojene sa svakim čvorom podgrafa.



Sl. 17.2 Ilustracije uz pojam petlje.

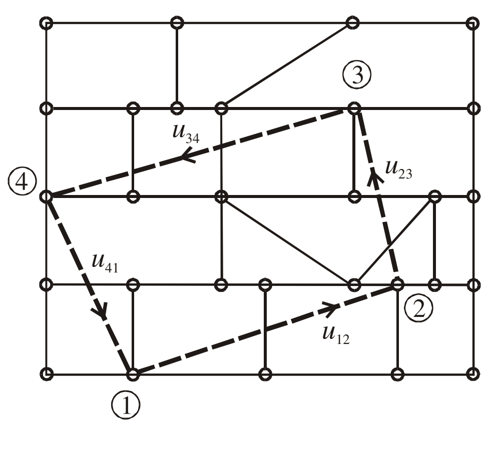
Graf prikazan na slici 17.2.a nije petlja jer nije povezan. Zatvoreni put između 1 i 2 odnosno 3 i 4, svaki za sebe predstavlja petlju, ali zajedno promatrano to nisu! Zatvoreni put na slici 17.2.b kao ni put na slici 17.2.c nisu petlje jer je u čvoru 1 u oba grafa spojeno više od dvije grane. Podgraf prikazan na slici 17.2.d jest petlja.

Poseban slučaj petlje jest ***oko** ili **elementarna petlja***. To je svaka petlja unutar koje nema niti jedne grane grafa, slika 17.2.e.

Na temelju navedenih primjera zaključujemo da je svaka petlja zatvoreni put, ali da svaki zatvoreni put nije petlja!

VAŽNO**:* Za svaku petlju vrijedi ***Kirchhoffov zakon napona, izraz (1.5). On ostaje vrijediti i ako se petlja deformira, a to je zbog toga jer prema četvrtom postulatu teorije mreže niti jedna petlja nije prožeta vanjskim promjenljivim magnetskim tokom. Zaključujemo da u terminima teorije mreža petlja *ne zauzima realni prostor*. Prostorne koordinate ne igraju nikakvu ulogu.

Zbog toga, ako se u nekoj mreži želi odrediti samo neki od napona, specifikacija na koju se petlju ti naponi odnose, uopće nije nužna, slika 17.3.



Sl. 17.3 U promatranoj mreži uvijek je $u_{12}+u_{23}+u_{34}+u_{41}=0$ i specifikacija petlje za koju to vrijedi nije nužna.

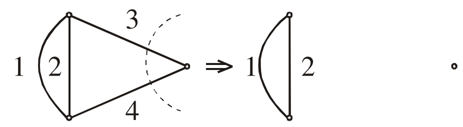
Tako primjerice ako znamo u_{23}, u_{34} i u_{41} možemo u skladu s Kirchhoffovim zakonom napona odrediti i napon u_{12}.

- ***Rez***. Skup grana nekog povezanog grafa sa svojstvima

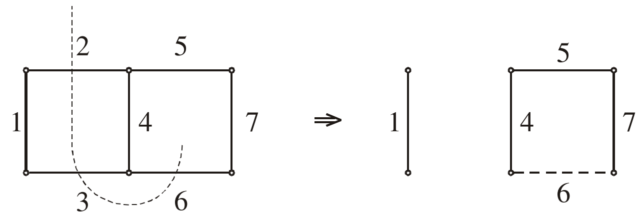
a) *uklanjanjem svih grana* iz tog skupa preostali graf (podgraf) prelazi u *dva odvojena grafa,* i

b) uklanjanjem svih grana iz tog skupa, *osim jedne*, i to bilo koje grane, preostali graf (podgraf) *ostaje povezan*.

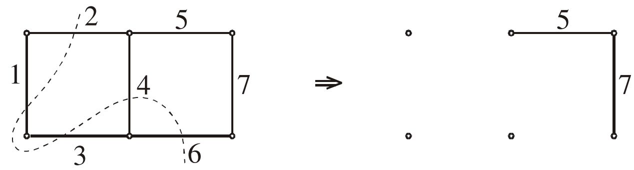
Pri tome se graf sa samo jednim čvorom smatra povezanim grafom, a pod uklanjanjem grane smatra se *brisanje grane uz zadržane čvorove*.



Grane 3 i 4 su rez.



Grane 2,3 i 6 nisu rez, jer nije zadovoljeno drugo svojstvo reza. Uklanjanjem svih grana osim grane 6 preostali graf ostaje i dalje nepovezan!



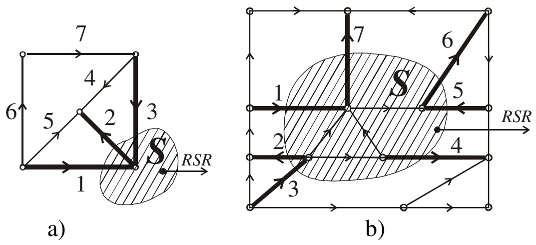
Grane 1, 2, 3, 4 i 6 nisu rez, jer oba svojstva reza nisu zadovoljena!

Sl. 17.4 Ilustracije uz pojam reza.

Iskazano u terminima elektrotehnike, gore navedena definicija reza može se preformulirati na ovaj način:

Rez je skup grana neke povezane mreže (grafa) koje prolaze kroz zatvorenu plohu *S* odabranu tako da dijeli zadanu mrežu (graf) u dvije podmreže (podgrafa).

Ilustrirajmo ovakvu interpretaciju reza dvama primjerima, slika 17.5. Grafovi su orijentirani s naznačenim referentnim smjerovima struja. Podsjetimo se da je u skladu s trećim postulatom teorije mreža rezultantni naboj svake naprave jednak nuli. Na nivou modela to znači da je rezultantni naboj elemenata mreže svake grane jednak nuli, što znači da količina naboja koja *uđe* u plohu *S* mora *biti jednaka* količini naboja koja iz te plohe *izađe*. Opažamo da za rez *vrijedi **Kirchhoffov zakon struje***.



Sl. 17.5 Dva primjera reza zatvorenom plohom *S* (*RSR* – referentni smjer reza).

Za mrežu sa *b* grana je

$$\sum_{k=1}^{b} q_{jk} i_k = 0 \; ; \quad \text{za } j-\text{ti rez} \qquad (1)$$

gdje je

$$q_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{ako se } RSR \ j\text{-tog reza podudara sa } RS \text{ struje } k\text{-te grane} \\ -1 & \text{ako se } RSR \ j\text{-tog reza ne podudara sa } RS \text{ struje } k\text{-te grane} \\ 0 & \text{ako } k\text{-ta grana nije u } j\text{-tom rezu} \end{cases}$$

U primjerima danima na slici 17.5 vrijedit će prema tome da je

ad a) $-i_1 + i_2 - i_3 = 0$

ad b) $-i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_5 + i_6 + i_7 = 0$

17.3 TEMELJNI TEOREM TEORIJE GRAFOVA

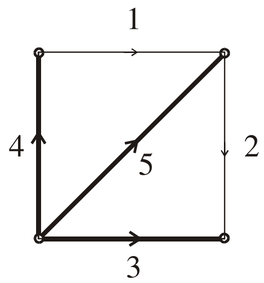
- ***Stablo*** *T* je povezani podgraf nekog povezanog grafa *G* koji sadrži *sve čvorove grafa G, ali niti jednu petlju.* Pri specifikaciji stabla dovoljno je navesti samo grane. Tako, primjerice, u grafu na slici 17.5.a jedno od mogućih stabala grafa tvore grane 1, 2, 3 i 6.
- ***Spojnice*** su sve grane grafa *G* koje ne pripadaju stablu. Skup spojnica je komplement stablu.

Temeljni teorem teorije grafova glasi:

Za zadani povezani graf *G* koji ima n+1 čvor i *b* grana te za zadano stablo *T*(*G*) vrijedi:

1. Između bilo kojeg para čvorova postoji samo jedan put duž stabla, tzv. *jedinstveni put.*
2. Broj grana stabla je *n*, a spojnica $l = b - n$.
3. *Svaka spojnica* zajedno s odgovarajućim brojem grana stabla tvori jednu jedinstvenu petlju koja se naziva ***temeljna petlja***.
4. *Svaka grana stabla* zajedno s odgovarajućim brojem spojnica tvori jedan jedinstveni rez koji se naziva ***temeljni rez.***

Primijenimo temeljni teorem teorije grafova na graf *G*, slika 17.6. Za stablo odaberimo podgraf *T* koji se sastoji od grana 3, 4 i 5.

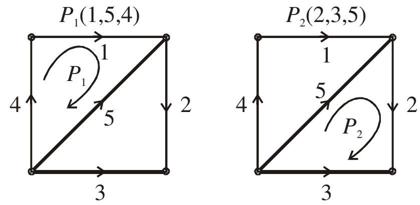


broj grana stabla $n = 3$

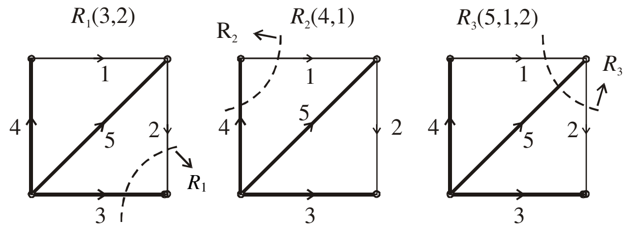
broj spojnica $l = b–n = 5–3=2$

Sl. 17.6 Zadani graf *G* i odabrano stablo *T* (3, 4, 5).

Na ovom je primjeru očigledna istinitost prvog iskaza temeljnog teorema. Zaista, između bilo koja dva čvora postoji samo jedan put duž stabla, jer kad bi postojao još koji put, to bi značilo da stablo sadrži petlju.



Sl. 17.7 Sve temeljne petlje. (Dogovorno smjer petlje određuje smjer spojnice).



Sl. 17.8 Svi temeljni rezovi. (Dogovorno smjer reza određuje smjer presječene grane stabla).

17.4 SUSTAVNI ZAPIS JEDNADŽBI MREŽE

Napišimo jednadžbe mreže za mrežu koja ima n+1 čvor i *b* grana. Na osnovi temeljnog teorema teorije grafova zaključujemo da

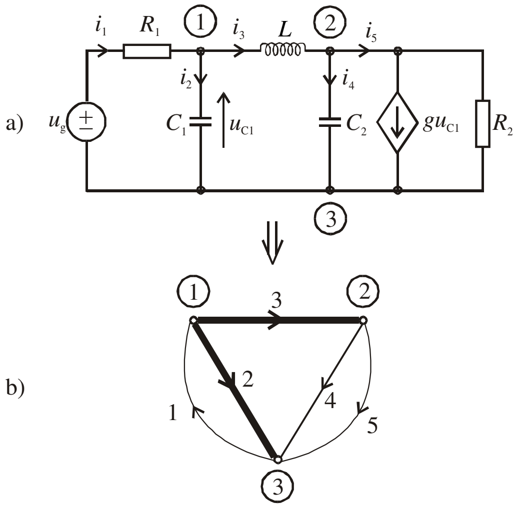
a) svakoj grani stabla odgovara jedan temeljni rez. To znači da se za zadanu mrežu može napisati ***n nezavisnih jednadžbi KZS-a.***

b) Svakoj spojnici odgovara jedna temeljna petlja. To znači da se za zadanu mrežu može napisati ***l = b – n nezavisnih jednadžbi KZN-a.***

Proizlazi da se skup linearnih jednadžbi napisanih na temelju Kirchhoffovih zakona sastoji od ukupno *b* jednadžbi, dakle onoliko jednadžbi koliko mreža ima grana.

Drugi skup jednadžbi kojim se kompletira skup jednadžbi mreže tvore konstitutivne relacije grana. Njih ima također *b*, što znači da skup jednadžbi mreže tvori 2*b* jednadžbi. Pri tome pretpostavljamo da su sve grane mreže ***normalne***. Pod normalnom granom smatra se svaka grana, napon i struja koje *u početku analize nisu poznati*. Svaka pasivna grana je zbog toga normalna, dok grane koje se sastoje samo od nezavisnih izvora to nisu, budući da su u tim granama unaprijed poznati valni oblici ili napona ili struje. U mrežama s takvim granama ne može se u općem slučaju na temelju broja grana odrediti ukupni broj jednadžbi mreže. Očigledno je samo da je broj jednadžbi mreže manji od *2b*.

Pokažimo postupak sustavnog zapisa jednadžbi mreže na jednostavnom primjeru, slika 17.9.



Sl. 17.9 a) Zadana mreže s označenim referentnim smjerovima struja grana.
b) Pripadni orijentirani graf s označenim stablom *T* (2.3).

Shvatimo li serijski spoj naponskog izvora u_g i otpora R_1 kao jednu granu a isto tako paralelni spoj naponom upravljanog strujnog izvora gu_{C1} i otpora R_2 kao jednu granu, dobivamo mrežu koja se sastoji od $n + 1 = 3$ čvora i $b = 5$ normalnih grana. Dakle, ukupni broj jednadžbi mreže je $2b=10$.

a) Skup linearnih jednadžbi sadrži dvije jednadžbe KZS-a ($n = 2$)

$$i_3 - i_4 - i_5 = 0$$
$$i_2 + i_4 + i_5 - i_1 = 0$$

i tri jednadžbe KZN-a ($l = b - n = 5 - 2 = 3$)

$$u_1 + u_2 = 0$$
$$u_4 - u_2 + u_3 = 0$$
$$u_5 - u_2 + u_3 = 0$$

b) Skup konstitutivnih relacija grana sadrži pet jednadžbi ($b = 5$) pri čemu početni uvjeti $u_{C1}(0)$, $u_{C2}(0)$ i $i_L(0)$ moraju biti unaprijed poznati.

$$u_1 = -u_g + R_1 i_1$$
$$u_2 = \frac{1}{C_1}\int_0^t i_2(x)dx + u_{C1}(0)$$
$$i_3 = \frac{1}{L}\int_0^t u_3(x)dx + i_L(0)$$
$$u_4 = \frac{1}{C_2}\int_0^t i_4(x)dx + u_{C2}(0)$$
$$i_5 = gu_{C1} + \frac{1}{R_2}u_5$$

Time su navedene *sve jednadžbe* koje su potrebne da bi se u zadanoj mreži odredili valni oblici napona i struja svih grana. Daljnji postupak je očigledan. Na osnovi konstitutivnih relacija izraze se svi naponi grana s pomoću struja grana i uvrste u jednadžbe KZN-a. Zajedno s prethodno napisanim dvjema jednadžbama KZS-a dobiven je sustav *od pet jednadžbi u pet nepoznatih struja grana*. Druga je mogućnost da se sve struje grana izraze s pomoću napona grana i uvrste u jednadžbe KZS-a. Zajedno s prethodno napisanim trima jednadžbama KZN-a dobiven je sustav od *pet jednadžbi u pet nepoznatih napona grana*.

Osim ovog načina zapisa jednadžbi mreža postoje i drugi koji vode na sustave s manjim brojem jednadžbi. To je zapis s pomoću ***jednadžbi struja petlji***, koji bi u našem primjeru doveo do sustava od tri jednadžbe u tri nepoznate struje petlje ili s pomoću ***jednadžbi napona čvorova*** (*jednadžbi rezova*), koji bi u našem primjeru doveo do sustava od dvije jednadžbe u dva nepoznata napona čvora.