XVIII. PREDAVANJE

O načinu rješavanja jednadžbi mreže. Važnost numeričkog proračuna. Sustavi diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Neprekinutost varijabli odziva. Napon na kapacitetu i struja induktiviteta kao varijable stanja. Naboj kapaciteta i tok induktiviteta kao varijable stanja. Pojam prikladnog stabla. Pravila za izgradnju prikladnog stabla za dobro definirane linearne vremenski nepromjenljive mreže. Red složenosti mreže. Primjer određivanja jednadžbi stanja s pomoću prikladnog stabla. Pojam opće grane mreže. Nadomjesna otporna mreža. Proširenje na nelinearne i vremenski promjenljive mreže. Mreže s višeprilaznim elementima. Drugi način interpretiranja pravila o izgradnji prikladnog stabla.

18. JEDNADŽBE STANJA

18.1 ZAHTJEVI NA JEDNADŽBE MREŽE

Riješiti jednadžbe mreže znači odrediti valne oblike napona i struja na svim elementima mreže. Ako je mreža *linearna i vremenski nepromjenljiva*, to znači, ili riješiti

a) sustav algebarskih jednadžbi ako se traži sinusoidalno ustaljeno stanje, ili
b) sustav integro-diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima ako se traži potpuni odziv. Za i malo složeniju mrežu, petog reda ili višeg, potrebno je riješiti karakterističnu jednadžbu, dakle, algebarsku jednadžbu petog stupnja ili višeg. Analitičko rješenje ove jednadžbe nije moguće (Abel, 1827.), već samo približno numeričko rješenje, što znači primjenu elektroničkog računala.

Ako je mreža *nelinearna i/ili vremenski promjenljiva*, samo se neki sasvim jednostavni problemi analize mogu riješiti analitički, i to oni koji se mogu svesti na neke rješive nelinearne ili s vremenski promjenljivim koeficijentima diferencijalne jednadžbe, kao što su primjerice, van der Polova jednadžba ili Mathieuova jednadžba i sl.

Inženjerski zdrav razum nam, u eri elektroničkih računala, kazuje da je kudikamo bolje odmah odustati od eventualnog prilagođavanja matematičkog modela nekog inženjerskog problema tipu nelinearne diferencijalne jednadžbe, rješenje koje poznajemo, u korist numeričkog rješenja, ali sada najpotpunijeg matematičkog modela zadanog inženjerskog problema.

Zbog toga je temeljni zahtjev na jednadžbe mreže da moraju biti takvog zapisa da je moguć *jednostavan numerički proračun* pripadnih diferencijalnih jednadžbi i da *ne postoji ograničenje* na vrstu analizirane mreže. Ove zahtjeve zadovoljavaju *sustavi diferencijalnih jednadžbi prvog reda,* ali uz jedan specifičan izbor varijabli mreže. Pokažimo to na jednom jednostavnom primjeru.

Neka je zadana diferencijalna jednadžba prvoga reda

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1}$$

i pretpostavimo da je u nekom trenutku t_0 poznata vrijednost varijable $x(t_0) = x_0$. Da bismo odredili vrijednost varijable $x(t)$ u nekom bliskom trenutku $t_1 > t_0$, tj. $x(t_1)$, to ćemo ju razviti u Taylorov red u trenutku t_0. Uzmemo li prva dva člana reda, vrijedit će da je

$$x(t_1) \approx x(t_0) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} \cdot (t_1 - t_0)$$

odnosno uzevši u obzir (1)

$$x(t_1) \approx x(t_0) + (t_1 - t_0) f(t_0, x_0)$$

čime je određena približna vrijednost varijable $x(t)$ u trenutku t_1. Očigledno znamo li $x(t_1)$, možemo odabrati idući trenutak $t_2 > t_1$ i odrediti na analogan način kao u prethodnom koraku vrijednost varijable $x(t_2)$. *U* $(n+1)$-om koraku vrijedit će da je

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + (t_{n+1} - t_n) \cdot f(t_n, x_n) \; ; \quad x(t_n) = x_n \tag{2}$$

i približno rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je dobiveno. Prirodno očekujemo da što je interval $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ kraći da će i približno rješenje biti točnije. Pri tome je ključno da bude zadovoljena osnovna pretpostavka za razvoj neke funkcije $x(t)$ u Taylorov red, a to je da je ona *neprekinuta funkcija*.

Želimo li dakle na prikazani način rješavati jednadžbe mreže to se kao varijable mreže smiju koristiti *samo* neprekinute funkcije. To su

a) u linearnim vremenski nepromjenljivim mrežama: ***naponi na kapacitetima*** *i* ***struje induktiviteta***, a u
b) nelinearnim i vremenski promjenljivim odnosno nepromjenljivim mrežama: ***naboji na kapacitetima*** *i* ***tokovi induktiviteta***.

Ove se varijable nazivaju ***varijable stanja*** a sustavi diferencijalnih jednadžbi prvog reda s tim varijablama ***jednadžbe stanja***.

Pokažimo kako se na osnovi temeljnog teorema teorija grafova i odabranih varijabli stanja mogu napisati jednadžbe stanja za svaku mrežu.

18.2 PRAVILA ZA IZGRADNJU PRIKLADNOG STABLA (T. R. Bashkow, 1957.)

Pod *prikladnim stablom* smatramo svako stablo na osnovi kojeg je moguće napisati jednadžbe stanja. Sva razmatranja provest ćemo na primjeru *dobro definiranih linearnih vremenski nepromjenljivih mreža* s jednoprilaznim elementima.

a) ***Kapacitet***. U skladu s temeljnim teoremom teorije grafova znamo da se svaka nezavisna jednadžba KZS-a dobiva od struja grana koje pripadaju nekom rezu. No, rez tvore *jedna presječena grana stabla* i odgovarajući broj spojnica. Budući da je svaka od jednadžbi stanja jedna diferencijalna jednadžba prvog reda to se u svakoj od tih jednadžbi nalazi samo po jedna prva derivacija. Jednoj presječenoj grani stabla odgovarat će *jedino* struja kapaciteta jer je

$$i = C\frac{duc}{dt}$$

a jedine dopuštene varijable stanja su naponi na kapacitetima i struje induktiviteta. Smještanjem *kapaciteta u stablo* zajamčeno je da će pripadna jednadžba stanja biti diferencijalna jednadžba prvog reda. U protivnom, tj. ne smjestimo li sve kapacitete u stablo, barem u nekim jednadžbama KZS-a bi se za neke rezove pojavilo i više prvih derivacija odabranih varijabli stanja!

b) ***Induktivitet***. U skladu s temeljnim teoremom teorije grafova znamo da se svaka nezavisna jednadžba KZN-a dobiva od napona grana koje pripadaju nekoj petlji. No, petlju tvore *jedna spojnica* i odgovarajući broj grana stabla. Analogno prethodnom objašnjenju zaključujemo da se svi *induktiviteti* moraju smjestiti *u spojnice.*

c) ***Otpor***. U konstitutivnoj relaciji otpora nema derivacija varijabli, pa je *svejedno* smjeste li se otpori *u stablo* ili *u spojnice.*

d) ***Nezavisni naponski izvor***. U skladu s temeljnim teoremom teorije grafova znamo da napon svake spojnice određuju naponi svih grana stabla koje s tom spojnicom čine petlju. Budući da je po definiciji napon nezavisnog naponskog izvora zadan, to se on *ne može* odrediti iz napona drugih grana koje čine stablo. Zbog toga nezavisni *naponski izvori* moraju biti *u stablu.*

e) ***Nezavisni strujni izvor***. Analogno prethodnom objašnjenju, struju svake grane stabla određuju struje svih spojnica koje s tom granom stabla čine rez. Proizlazi da nezavisni strujni izvor ne može biti u stablu budući da bi njegova struja, a koja je zadana, inače bila određena strujama spojnica. Zbog toga *nezavisni strujni izvori* moraju biti *u spojnicama.*

Na osnovi ove analize proizlaze pravila za izgradnju prikladnog stabla u dobro definiranim linearnim vremenski nepromjenljivim mrežama s jednoprilaznim elementima:

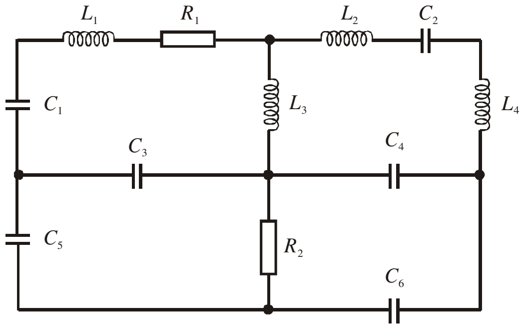
1. Svi kapaciteti i nezavisni naponski izvori moraju biti u stablu.
2. Svi induktiviteti i nezavisni strujni izvori moraju biti u spojnicama.
3. Za otpore je svejedno jesu li u stablu ili u spojnicama.

18.3 RED SLOŽENOSTI MREŽE

Red složenosti mreže N jednak je broju varijabli stanja. U dobro definiranim mrežama *red složenosti mreže* jednak je *broju reaktivnih elemenata.*

Ako mreža *nije dobro definirana,* broj varijabli stanja *smanjuje se* za po jednu varijablu za svaku kapacitivnu petlju i za svaki induktivni rez. Ovo proizlazi iz činjenice da zbog KZN-a u kapacitivnoj petlji svi naponi na kapacitetima nisu međusobno nezavisni. Također zbog KZS-a u induktivnom rezu sve struje induktiviteta nisu međusobno nezavisne. Naime, u tim se slučajevima uvijek po jedan napon u kapacitivnoj petlji odnosno struja u induktivnom rezu mogu izraziti kao linearna kombinacija ostalih napona odnosno struja.

Napomena: Analogno definiciji induktivnog čvora u poglavlju 6 pod induktivnim rezom smatramo svaki rez u kojem se nalaze samo induktiviteti i/ili nezavisni strujni izvori.



Sl. 18.1 Mreža reda složenosti N=6.

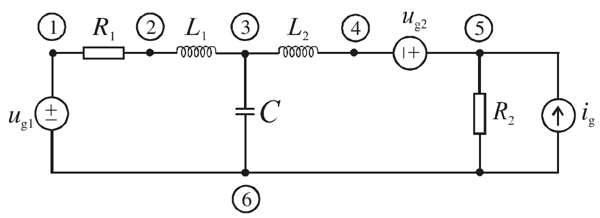
U mreži sheme spoja prema slici 18.1 red složenosti mreže je

$$N = 10 - (1+3) = 6$$

budući da u mreži postoji 10 reaktivnih elemenata, te jedna kapacitivna petlja (C_3, C_4, C_5, C_6) i tri induktivna reza (L_1, L_2, L_3), (L_1, L_3, L_4) i (L_2, L_4).

18.4 ODREĐIVANJE JEDNADŽBI STANJA S POMOĆU PRIKLADNOG STABLA

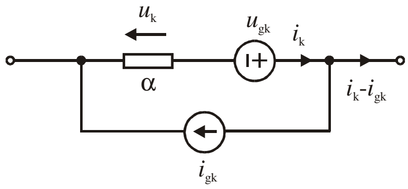
Postupak određivanja jednadžbi stanja s pomoću prikladnog stabla najzgodnije je objasniti na primjeru, slika 18.2.



Sl. 18.2 Zadana shema spoja mreže.

U promatranom primjeru nećemo sažimati grane nego ćemo svakom elementu mreže pridijeliti granu. Stoga zadana mreža ima n+1=6 čvorova i b=8 grana. Pri tome su čvorovi 1, 2 i 4 ***trivijalni čvorovi***, tj. čvorovi na koje su spojene samo po dvije grane.

Uvijek se crta samo *jedan* orijentirani graf. Kod pridjeljivanje smjera grana, važno je sustavnosti zapisa radi, da se držimo nekog dogovora. Kod pisanja jednadžbi stanja uobičajen je dogovor o referentnim smjerovima struje i napona koji vrijedi za tzv. opću granu mreže. Pod ***općom granom mreže*** smatramo granu u kojoj se nalazi nezavisni naponski izvor u seriju spojen s nekim pasivnim elementom mreže $\alpha = R, L, C$ ili nekom kombinacijom pasivnih elemenata mreže te nezavisni strujni izvor paralelno spojen ovoj kombinaciji elemenata mreže, slika 18.3



Sl. 18.3 Shema spoja k-te opće grane mreže.

Opažamo da mogu nastupiti dva slučaja:

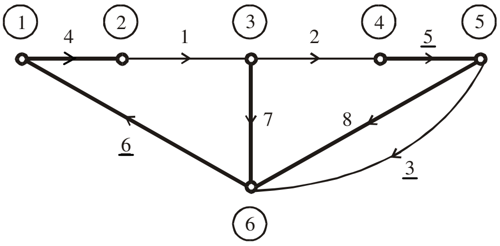
a) u k-toj grani je *pasivni* element ⇒ referentni smjerovi napona i struje *su pridruženi*

b) u k-toj grani je *aktivni* element ⇒ referentni smjerovi napona i struje *nisu pridruženi.*

Ovo znači da je zgodno uzeti orijentaciju grane s nezavisnim naponskim izvorom *usklađenu* sa stvarnim smjerom napona naponskog izvora a grane s nezavisnim strujnim izvorom orijentaciju *suprotnu* od stvarnog smjera struje strujnog izvora. Tada je za k-tu granu

$$u_k = -u_{gk} \quad ili \quad i_k = -i_{gk}$$

U skladu s ovim dogovorom u grafu, slika 18.4, pridruženom zadanoj shemi spoja mreže označeni su unaprijed samo smjerovi grana 5 i 6 gdje se nalaze nezavisni naponski izvori i grane 3 u kojoj se nalazi nezavisni strujni izvor.



Sl. 18.4 Orijentirani graf s prikladnim stablom $T(4, 5, 6, 7, 8)$.

Napišu se *jednadžbe KZN-a za temeljne petlje* ($l = b - n = 8 - 5 = 3$).

$P_1(1, 7, 6, 4)$ $\quad u_1+u_7+u_6+u_4=0 \quad$ (3)

$P_2(2, 5, 8, 7)$ $\quad u_2+u_5+u_8-u_7=0 \quad$ (4)

$P_3(3, 8)$ $\quad u_3-u_8=0$

te jednadžbe KZS-a za temeljne rezove ($n = 5$)

$R_1(4, 1)$ $\quad i_4-i_1=0$

$R_2(5, 2)$ $\quad i_5-i_2=0$

$R_3(6, 1)$ $\quad i_6-i_1=0$

$R_4(7, 1, 2)$ $\quad i_7+i_2-i_1=0 \quad$ (5)

$R_5(8, 2, 3)$ $\quad i_8+i_3-i_2=0 \quad$ (6)

dok su konstitutivne relacije grana dane izrazima

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} \;;\; u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} \;;\; i_3 = -i_g \;;\; u_4 = R_1 i_4$$

$$u_5 = -u_{g2} \;;\; u_6 = -u_{g1} \;;\; i_7 = C\frac{du_7}{dt} \;;\; u_8 = R_2 i_8$$

Ako se sve varijable izraze s pomoću struja induktiviteta $i_1 = i_{L1}$, $i_2 = i_{L2}$ te napona na kapacitetu $u_7 = u_C$, to iz jednadžbe (5) dobivamo da je

$$C\frac{du_c}{dt} = i_{L1} - i_{L2} \tag{7}$$

a iz jednadžbe (3) da je

$$L_1\frac{di_{L1}}{dt} + u_C - u_{g1} + R_1 i_4 = 0 \tag{8}$$

odnosno iz jednadžbe (4) da je

$$L_2\frac{di_{L2}}{dt} - u_{g2} + R_2 i_8 - u_C = 0 \tag{9}$$

Budući da je prema (6), $i_8 = i_2 - i_3 = i_{L2} + i_g$, to iz (9) proizlazi da je

$$L_2\frac{di_{L2}}{dt} - u_{g2} + R_2 i_{L2} + R_2 i_g - u_C = 0 \tag{10}$$

Sređivanjem izraza (7), (8) i (10) dobivamo jednadžbe stanja mreže ***u normalnom obliku***:

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}(i_{L1} - i_{L2}) \tag{11a}$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1}(-R_1 i_{L1} - u_C) + \frac{1}{L_1}u_{g1} \tag{11b}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2}(-R_2 i_{L2} + u_C) + \frac{1}{L_2}(u_{g2} - R_2 i_g) \tag{11c}$$

Time je postavljena zadaća riješena.

18.5 ODREĐIVANJE JEDNADŽBI STANJA S POMOĆU NADOMJESNE OTPORNE MREŽE

U prethodnom odsječku nezavisni su izvori shvaćeni kao narinuti ulazi na pasivnu mrežu, što je fizikalno očigledno. Moguć je i drugi pristup: privremeno se svi reaktivni elementi shvate kao narinuti ulazi na preostali dio analizirane mreže, i to tako da se

a) svaki *induktivitet* L_k zamijeni *strujnim izvorom* $i_{Lk}(t)$, a

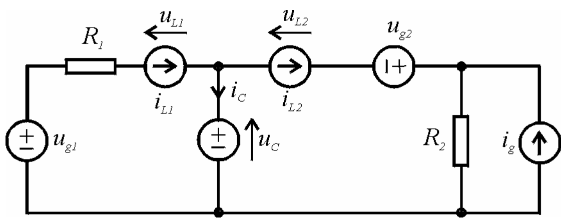
b) svaki *kapacitet* C_k zamijeni s *naponskim izvorom* $u_{Ck}(t)$.

Polazna mreža pretvorena je u otpornu mrežu. Kao rješenje ove otporne mreže dobije se sustav jednadžbi u nepoznatim varijablama u_{Lk} i i_{Ck}. Ako se u ovom sustavu jednadžbi stavi da je

$$u_{Lk} = L_k \frac{di_{Lk}}{dt} \quad ; \quad i_{Ck} = C_k \frac{du_{Ck}}{dt}$$

dobije se sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda u kojem su sve varijable izražene s pomoću varijabli stanja.

Pokažimo ovaj postupak na primjeru mreže iz prethodnog odsječka, slika 18.5.



Sl. 18.5 Pretvorba zadane sheme spoja, slika 18.2, u nadomjesnu otpornu mrežu.

Elementarnom analizom otporne mreže, prema slici 18.5, dobivamo da je

$$i_C = i_{L1} - i_{L2} \tag{12a}$$

$$u_{L1} = -R_1 i_{L1} - u_C + u_{g1} \tag{12b}$$

$$u_{L2} = -R_2 i_{L2} + u_C + u_{g2} - R_2 i_g \tag{12c}$$

Budući da je

$$u_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt} \quad ; \quad u_{L2} = L_2 \frac{di_{L2}}{dt} \quad ; \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

što uvršteno u sustav jednadžbi (12) daje isti sustav jednadžbi kao i prethodno opisani postupak.

18.6 NELINEARNE I VREMENSKI PROMJENLJIVE MREŽE

U nelinearnim i vremenski promjenljivim mrežama umjesto napona na kapacitetima i struja induktiviteta kao varijable stanja se upotrebljavaju naboji na kapacitetima i tokovi induktiviteta.

Pretpostavimo da su u prethodnom primjeru, slika 18.2, oba induktiviteta nelinearna, zadana karakteristikama

$$i_{L1} = f_1(\varphi_1) \; ; \; i_{L2} = f_2(\varphi_2)$$

Budući da je

$$u_{L1} = \frac{d\varphi_1}{dt} \quad ; \quad u_{L2} = \frac{d\varphi_2}{dt} \quad ; \quad q = Cu_C$$

to se na osnovi sustava jednadžbi (11) mogu odmah napisati jednadžbe stanja:

$$\frac{dq}{dt} = f_1(\varphi_1) - f_2(\varphi_2) \tag{13a}$$

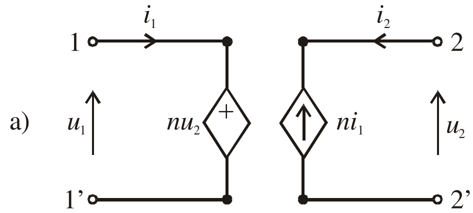
$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -R_1 f_1(\varphi_1) - \frac{1}{C} q + u_{g1} \tag{13b}$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -R_2 f_2(\varphi_2) + \frac{1}{C} q + u_{g2} - R_2 i_g \tag{13c}$$

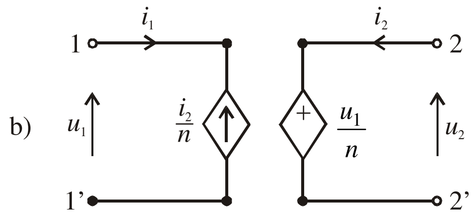
Vidimo da je proširenje opisanog postupka na *nelinearne mreže,* a isto bi vrijedilo i za *vremenski promjenljive mreže,* izuzetno jednostavno. Postupak proračuna je u svim slučajevima jednak i prepušta se računalu.

18.7 MREŽE S VIŠEPRILAZNIM ELEMENTIMA

Izgraditi prikladno stablo, ako u zadanoj mreži postoje višeprilazni elementi, nije teško, ako se pravila postavljena u odsječku 18.2 interpretiraju malo drugačije. U *stablo* se postavljaju svi elementi mreže *sa specificiranim naponom* (nezavisni naponski izvori, kapaciteti kao privremeni naponski izvori – sjetimo se da se početni naboj na kapacitetu shvaća kao nezavisni istosmjerni naponski izvor), a u *spojnice* svi elementi mreže *sa specificiranom strujom.*



$$u_1 = n\, u_2 \;\; ; \;\; i_2 = -n\, i_1$$



$$i_1 = -\frac{i_2}{n} \;\; ; \;\; u_2 = \frac{u_1}{n}$$

Sl. 18.6 Dva prikaza idealnog transformatora
a) grana 1 pripada stablu a grana 2 spojnicama
b) grana 1 pripada spojnicama a grana 2 stablu.

Proizlazi da ako se u mreži nalazi

a) *strujom upravljani naponski izvor* (SU/NI): *obje grane u stablo,* budući da su i upravljačka kao i upravljana grana specificirane naponom, tj.

$$u_1 = 0 \;\; ; \;\; u_2 = ri_1$$

b) *strujom upravljani strujni izvor* (SU/SI): upravljačka grana u *stablo*, a upravljana grana u *spojnice*, budući da je

$$u_1 = 0 \;\; ; \;\; i_2 = \alpha i_1$$

c) *naponom upravljani strujni izvor* (NU/SI): obje grane u *spojnice* budući da vrijedi

$$i_1 = 0\ ;\quad i_2 = gu_1$$

d) *naponom upravljani naponski izvor* (NU/NI): upravljačka grana u *spojnice*, a upravljana grana u *stablo* budući da vrijedi

$$i_1 = 0\ ;\quad u_2 = Au_1$$

e) *Idealni transformator* može se shvatiti kao da se sastoji od dva zavisna izvora, slika 18.6. Jednu granu treba staviti u *stablo* a drugu u *spojnice*.