XIX. PREDAVANJE

Svojstvo linearnosti. Svojstvo vremenske nepromjenljivosti. Izomorfnost odziva i poticaja. Dovoljnost analize prisilnih odziva. Skokovni odziv. Pojam funkcije jediničnog skoka. Stepeničasti poticaj. Pojam funkcije skoka. Prisilni odziv na stepeničasti poticaj. Aproksimacija funkcije poticaja zbrojem funkcija skoka. Razni oblici Du Hamelovog integrala. Uzimanje u obzir diskontinuiteta u valnom obliku poticaja. Impulsni odziv. Definicija jediničnog impulsa. Svojstvo uzorkovanja jediničnog impulsa. Impulsni odziv kao derivacija skokovnog odziva. Dva oblika konvolucijskog integrala. Veza između opće analize linearnih vremenski nepromjenljivih mreža u vremenskom i frekvencijskom području.

VI. LINEARNE VREMENSKI NEPROMJENLJIVE MREŽE

Svaka mreža u kojoj su *svi pasivni* elementi mreže linearni i vremenski nepromjenljivi naziva se ***linearnom vremenski nepromjenljivom* mrežom.**

Svojstvo linearnosti nam kazuje da je ovisnost odziva o poticaju linearna. Primjerice, ako poticaj $u_1(t)$ uzrokuje odziv $i_1(t)$, a poticaj $u_2(t)$ odziv $i_2(t)$, dakle ako

$$u_1(t) \Rightarrow i_1(t) \qquad ; \qquad u_2(t) \Rightarrow i_2(t)$$

tada vrijedi da

$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \Rightarrow \alpha i_1(t) + \beta i_2(t)$$

gdje su α *i* β neke realne konstante.

Svojstvo vremenske nepromjenljivosti nam kazuje da valni oblik odziva ne ovisi o trenutku uključenja poticaja. Dakle, ako

$$u(t) \Rightarrow i(t)$$

onda vrijedi da

$$u(t-x) \Rightarrow i(t-x)$$

Na osnovi izloženih svojstava proizlazi da u svakoj linearnoj vremenski nepromjenljivoj mreži u ustaljenom stanju u odzivu postoje samo one frekvencije koje postoje i u poticaju. Ova se činjenica često izriče i na ovaj način: U svakoj linearnoj vremenski nepromjenljivoj mreži u ustaljenom stanju odziv i poticaj su ***izomorfni***.

U poglavlju 7.2 uveden je pojam potpunog odziva i njegovih komponenata : slobodnog i prisilnog odziva. Naglašeno je da je svaka od komponenata potpunog odziva linearna funkcija pripadnog poticaja. Također, u poglavlju 9.1 pokazano je da se u *nekim vrstama* istosmjernih krugova prisilni odziv može interpretirati kao posebni slučaj slobodnog odziva.

Općenito to ne vrijedi. Štoviše upravo zaključak suprotan tome jest istinit. Naime, *slobodni odziv* se *uvijek* može interpretirati kao *posebni slučaj prisilnog odziva* za neku linearnu mrežu na istosmjerne poticaje. Nenulti početni uvjeti uvijek se mogu shvatiti kao naponski izvori u seriju s kapacitetima odnosno kao strujni izvori paralelno induktivitetima.

Zbog toga je pri analizi linearnih mreža dovoljno analizirati *samo prisilne odzive,* uključivši obavezno i istosmjerne poticaje, na temelju čega možemo odrediti potpune odzive promatranih mreža.

19. SUPERPOZICIJSKI INTEGRALI

19.1 SKOKOVNI ODZIV

Skokovni odziv je *prisilni* odziv mreže na koju je narinut poticaj u obliku funkcije ***jediničnog skoka.***

19.1.1 Definicija funkcije jediničnog skoka

(O. Heaviside, 1887.)

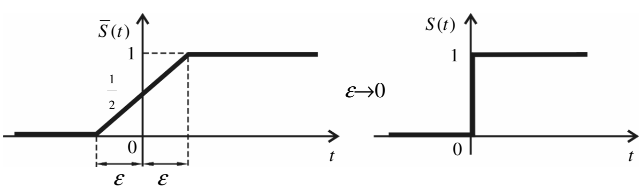
Funkcija jediničnog skoka (step funkcija) obično se označava sa $S(t)$ i definira se kao

$$S(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{S}(t) \qquad (1)$$

gdje je funkcija $\overline{S}(t)$ dana izrazom

$$\overline{S}(t) = \begin{cases} 0 & t \le -\varepsilon \\ \dfrac{1}{2\varepsilon} t + \dfrac{1}{2} & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 1 & t \ge \varepsilon \end{cases}$$

a ε je po volji malen pozitivni broj.



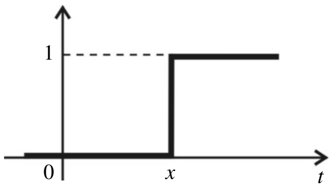
Sl. 19.1 Uz definiciju jediničnog skoka.

Jedinični skok često se i izravno definira kao funkcija

$$S(t) = \begin{cases} 0 & t \le -0 \\ 1 & t \ge +0 \end{cases} \quad (2)$$

Jedinični skok pomaknut po vremenskoj osi, slika 19.2, definira se kao funkcija

$$S(t-x) = \begin{cases} 0 & t \le x-0 \\ 1 & t \ge x+0 \end{cases} \quad (3)$$



Sl. 19.2 Vremenski pomak jediničnog skoka.

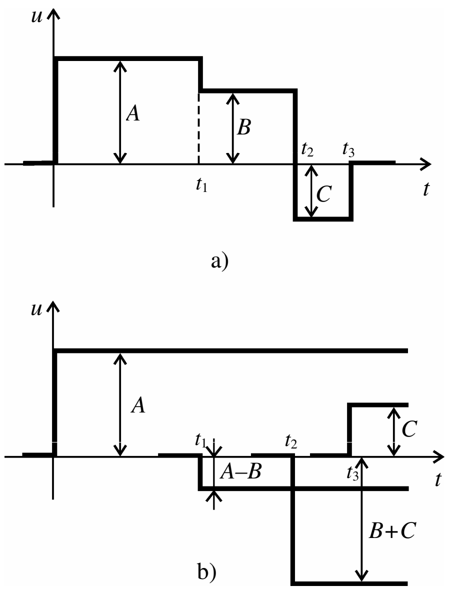
19.1.2 Odziv na stepeničasti poticaj

Pod *stepeničastim poticajem* smatramo svaki poticaj koji u određenim vremenskim intervalima zadržava stalne vrijednosti. Vrijedi:

Ako znamo skokovni odziv $s(t)$ neke mreže, onda znamo prisilni odziv te mreže na bilo koji stepeničasti poticaj.

Pokažimo istinitost ove tvrdnje na primjeru prikazanom na slici 19.3. Opažamo da se zadani stepeničasti poticaj može prikazati kao zbroj funkcija skoka

$$u(t) = AS(t) - (A-B)S(t-t_1) - (B+C)S(t-t_2) + \\ + CS(t-t_3)$$



Sl. 19.3 a) Primjer stepeničastog poticaja.
b) Prikaz zadanog stepeničastog poticaja s pomoću zbroja funkcija skoka.

Pritom pod ***funkcijom skoka*** $\alpha S(t)$ smatramo funkciju jediničnog skoka pomnoženu s nekim realnim brojem $\alpha \neq 1$.

Analizirana mreža je linearna, dakle vrijedi *svojstvo homogenosti* (odsječak 2.2.2). To znači da primjerice vrijedi

$$AS(t) \Rightarrow As(t)$$

Također, mreža je vremenski nepromjenljiva, tj. valni oblik odziva ne ovisi o trenutku uključenja poticaja. Zbog toga vrijedi primjerice da je

$$CS(t-t_3) \Rightarrow Cs(t-t_3)$$

Osim svojstva homogenosti svaka linearna mreža iskazuje i *svojstvo aditivnosti* tako da možemo odmah napisati izraz za valni oblik odziva (struje) u našem primjeru. Proizlazi

$$u(t) \Rightarrow i(t) = As(t) - (A-B)s(t-t_1) - (B+C)s(t-t_2) + \\ + Cs(t-t_3)$$

Uočimo da istinitost polazne tvrdnje o odzivu na stepeničasti poticaj ovisi samo o istinitosti tvrdnje da se svaka stepeničasta funkcija može shvatiti kao zbroj funkcija skoka a to očigledno uvijek vrijedi.

Zaključujemo da ako znamo skokovni odziv $s(t)$ neke mreže onda stepeničasti poticaj zadan izrazom

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k S(t-t_k)$$

uzrokuje odziv valnog oblika

$$i(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k s(t-t_k)$$

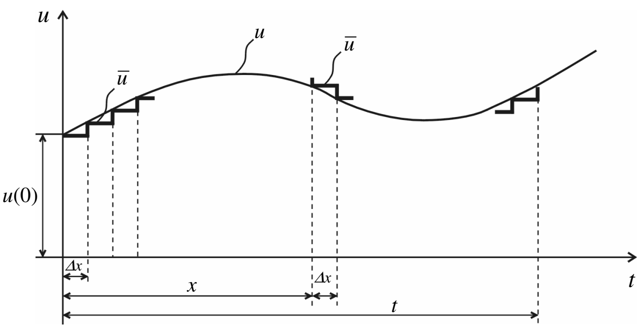
gdje je n - broj intervala u koji je razdijeljena stepeničasta funkcija poticaja.

19.1.3 Odziv na poticaj po volji (Du Hamel, 1833.)

Ako znamo skokovni odziv $s(t)$ neke mreže, onda znamo prisilni odziv te mreže na bilo koji poticaj.

Ova je tvrdnja istinita ako se pokaže da se valni oblik bilo kojeg poticaja može prikazati kao zbroj funkcija skoka. Pokažimo to na primjeru, slika 19.4. Na temelju zadane funkcije $u(t)$ tvorimo novu stepeničastu funkciju $\overline{u}(t)$ kojom aproksimiramo zadanu funkciju. U nekom trenutku t, slika 19.4, stepeničasta funkcija $\overline{u}(t)$ definirana je izrazom

$$\overline{u}(t) = u(0)\cdot S(t) + [u(\Delta x) - u(0)]\cdot Ş(t-\Delta x) + \cdots + \\ + [u(x+\Delta x) - u(x)]\cdot S(t-x-\Delta x) + \cdots + \\ + [u(t) - u(t-\Delta x)]\cdot S(t-t)$$



Sl. 19.4 Tvorba stepeničaste funkcije $\bar{u}(t)$ na temelju zadane funkcije poticaja $u(t)$.

odnosno u kompaktnijem obliku

$$\bar{u}(t) = u(0)S(t) + \sum_{x=0}^{t-\Delta x} \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] S(t-x-\Delta x)$$

Pretpostavimo sada da je poznat skokovni odziv promatrane mreže, što znači da poticaj $S(t)$ uzrokuje odziv $s(t)$. Ovo znači da zbog linearnosti i vremenske nepromjenljivosti promatrane mreže poticaj $\bar{u}(t)$ uzrokuje odziv $\bar{i}(t)$, tj.

$$\bar{i}(t) = u(0)s(t) + \sum_{x=0}^{t-\Delta x} \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] s(t-x-\Delta x)$$

Ako se ovaj izraz napiše u obliku

$$\bar{i}(t) = u(0)s(t) + \sum_{x=0}^{t-\Delta x} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot s(t-x-\Delta x) \cdot \Delta x$$

te pretpostavi da $\Delta t \to 0$, vrijedit će

$$\bar{u}(t) \to u(t) \quad ; \quad \sum_{x=0}^{t-\Delta x} \to \int_0^t \cdots dx \quad ;$$
$$\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \to \frac{du(x)}{dx} \quad ; \quad \bar{i}(t) \to i(t)$$

te dobivamo valni oblik odziva $i(t)$ na poticaj $u(t)$ po volji

$$i(t) = u(0)s(t) + \int_0^t \frac{du(x)}{dx} s(t-x)dx \qquad (4)$$

Skokovni odziv $s(t)$ se obično piše kao

$$s(t) = f(t) \cdot S(t)$$

gdje je $f(t)$ neprekinuta funkcija definirana na intervalu $-\infty < t < \infty$. U skladu s definicijom jediničnog skoka, skokovni odziv je funkcija definirana od $t \geq +0$. Izraz (4) prelazi u oblik

$$i(t) = u(0)f(t) + \int_0^t \frac{du(x)}{dx} f(t-x)dx \quad ; \quad t \geq +0 \qquad (5)$$

Ovaj se izraz naziva i ***Du Hamelov integral***. Postoje još tri oblika Du Hamelovog integrala. Tako primjerice parcijalnom integracijom izraza (5) dobivamo

$$i(t) = u(0)f(t) + u(x)f(t-x)\Big|_0^t + \int_0^t \frac{df(t-x)}{dx} u(x)dx$$

odnosno

$$i(t) = f(0)u(t) + \int_0^t \frac{df(t-x)}{dx} u(x)dx \quad ; \quad t \geq +0 \qquad (6)$$

Zamjenom varijabli $t - x = x'$, te kasnijom ponovnom zamjenom varijable x' varijablom x, dobivamo iz (5) da je

$$i(t) = u(0)f(t) + \int_0^t \frac{du(t-x)}{dx} f(x)dx \quad ; \quad t \geq +0 \qquad (7)$$

odnosno iz (6)

$$i(t) = f(0)u(t) + \int_0^t \frac{df(x)}{dx} u(t-x)dx \quad ; \quad t \geq +0 \qquad (8)$$

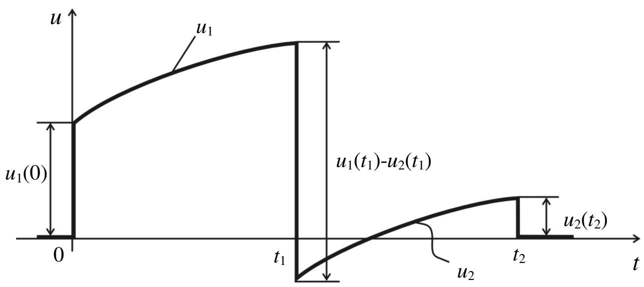
Napomene:

a) Ako je poticaj zadan s više analitičkih izraza u raznim vremenskim intervalima za $t \geq +0$, pokazuje se da je zgodnije koristiti izraze (5) i (6) u kojima se kao nezavisna varijabla pojavljuje *x* a ne *t - x*.

b) Važno je uočiti da je *x nezavisna varijabla* , a *t je parametar.*

Ako u poticaju postoje *diskontinuiteti,* to se mora posebno uzeti u obzir pri proračunu. Tako primjerice za poticaj $u(t)$ prikazan na slici 19.5 vrijedit će sljedeći izraz za valni oblik u intervalu $t_2 \leq t \leq \infty$ *:*

$$i(t) = u_1(0)f(t) + \int_0^{t_1} \frac{du_1(x)}{dx} f(t-x)dx - \left[u_1(t_1) - u_2(t_1)\right] f(t-t_1)$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{du_2(x)}{dx} f(t-x)dx - u_2(t_2)f(t-t_2) \; ; \quad t \geq t_2$$



Sl. 19.5 Primjer poticaja s diskontinuitetima.

19.2 IMPULSNI ODZIV

Impulsni odziv je *prisilni* odziv mreže na koju je narinut poticaj u obliku ***jediničnog impulsa***.

19.2.1 Definicija jediničnog impulsa (P. A. Dirac)

Jedinični impuls ili Diracova funkcija obično se označava sa $\delta(t)$ i definira se kao

$$\begin{aligned} &\delta(t)=0 \qquad ; \qquad \forall t\neq 0 \\ &\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1 \qquad ; \qquad \forall\varepsilon>0 \end{aligned} \tag{9}$$

Uočimo da $\delta(t)$ za t = 0, dakle vrijednost jediničnog impulsa u ishodištu $\delta(0)$, nije definirana. Jedinični impuls nije funkcija u klasičnom smislu.

Funkcija jediničnog skoka $S(t)$ jednaka je integralu jediničnog impulsa, tj.

$$S(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx \qquad ; \qquad \forall t \text{ osim za } t=0$$

Naime, za $t < 0$ je očigledno

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx=0$$

budući da je $\delta(t)$ =0 za svaki t < 0. Za t > 0 vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx=\int_{-t}^{t}\delta(x)dx=1$$

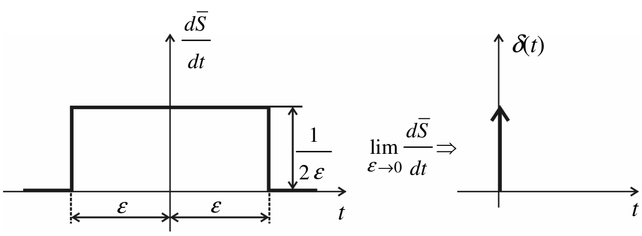
budući da je prema (9), uzme li se $t = \varepsilon > 0$, vrijednost tog integrala jednaka jedinici.

Vrijedi i obrat prethodne tvrdnje: jedinični impuls je derivacija funkcije jediničnog skoka, tj.

$$\delta(t)=\frac{dS}{dt} \tag{10}$$

što postaje očigledno ako se uvede funkcija $\overline{S}(t)$, dakle ako je

$$\delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d\overline{S}}{dt}$$

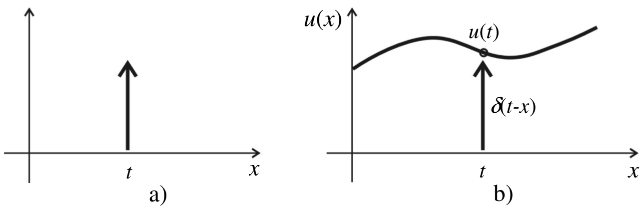


Sl.19.6 Uz definiciju jediničnog impulsa.

Uočimo da jedinični impuls ima dimenziju [s^{-1}] za razliku od funkcije jediničnog skoka koja je bezdimenzionalna. Jedinični impuls može biti pomaknut po vremenskoj osi, a također posjeduje i ***svojstvo uzorkovanja***, budući da vrijedi

$$u(t)=\int_{0}^{\infty}u(x)\delta(t-x)dx$$

kako je to pokazano na slici 19.7.



Sl 19.7 Uz objašnjenje: a) vremenskog pomaka i b) svojstva uzorkovanja jediničnog impulsa.

19.2.2 Konvolucijski integrali

Po analogiji s izrazom (10), tj. da je jedinični impuls derivacija funkcije jediničnog skoka vrijedi i da je impulsni odziv, označimo ga sa $h(t)$, derivacija skokovnog odziva, tj.

$$h(t)=\frac{ds}{dt} \tag{11}$$

Proizlazi da je

$$h(t)=\frac{d}{dt}\left[f(t)\cdot S(t)\right]=f(t)\frac{dS}{dt}+\frac{df}{dt}S(t)$$

Jedinični impuls, kako je prije pokazano, slika 19.7, “vadi” funkcijsku vrijednost od $f(t)$ u trenutku u kojem on djeluje. U konkretnom slučaju jedinični impuls djeluje u trenutku t = 0 pa "vadi" funkcijsku vrijednost od $f(t)$ za t = 0. Zbog toga je

$$h(t)=f(0)\,\delta(t)+\frac{df}{dt} \qquad ; \qquad t\geq +0 \tag{12}$$

U izrazu (12) zamijenimo varijablu t sa x, tj.

$$h(x)=f(0)\delta(x)+\frac{df(x)}{dx}$$

a svaku vrijednost poticaja $u(t)$ u trenutku t možemo, koristeći svojstvo uzorkovanja jediničnog impulsa napisati kao

$$u(t)=\int_{0}^{t}u(t-x)\delta(x)dx$$

(Umjesto pomaka jediničnog impulsa za t kao što je prikazano na slici 19.7b, pomakli smo za isti t funkciju poticaja, što je očigledno jednakovrijedno).

Opažamo da se Du Hamelov integral oblika zadanog izrazom (8) može napisati kao

$$i(t) = f(0)\cdot\int_0^t u(t-x)\delta(x)dx + \int_0^t \frac{df(x)}{dx}u(t-x)dx =$$
$$= \int_0^t u(t-x)\left[f(0)\delta(x) + \frac{df(x)}{dx}\right]dx$$

Ali, izraz u uglatoj zagradi je impulsni odziv te dobivamo da je

$$i(t) = \int_0^t u(t-x)h(x)dx \tag{13}$$

odnosno zamjenom varijabli

$$i(t) = \int_0^t u(x)h(t-x)dx \tag{14}$$

Integrali (13) i (14) zovu se ***konvolucijski integrali.***

Zaključujemo:

Ako znamo impulsni odziv $h(t)$ neke mreže onda rješenjem konvolucijskog integrala dobivamo prisilni odziv te mreže na poticaj po volji $u(t)$.

Napomene :

a) U stvarnim mrežama obično je *lako* snimiti odziv na istosmjerni poticaj i iz toga odrediti skokovni odziv, tako da se u praksi češće koriste Du Hamelovi integrali od konvolucijskih integrala.

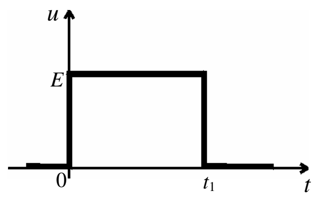
b) Impulsni odziv je teorijski izuzetno važan jer se konvolucijskim integralom postiže veza između opće analize linearnih vremenski nepromjenljivih mreža u *vremenskom području* s općom analizom tih istih mreža u *frekvencijskom području.*

Primjer:

Odredite valni oblik struje jednoprilaza za $t \geq t_1$, ako je zadan valni oblik napona narinutog na jednoprilaz, slika 19.8, a impulsni odziv jednoprilaza dan je izrazom

$$h(t) = \frac{1}{R}\left[\delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

gdje je τ - vremenska konstanta.



Sl. 19.8 Zadani valni oblik napona poticaja.

Rješenje:

Iskoristimo integral konvolucije dan izrazom (14). Proizlazi da za $t \geq t_1$ vrijedi

$$i(t) = \int_0^{t_1} u(x)h(t-x)dx = \frac{E}{R}\left[\int_0^{t_1}\delta(t-x)dx - \int_0^{t_1}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t-x}{\tau}}dx\right]$$

Uočimo da je gornja granica integrala t_1, jer nas interesira vrijeme od $t \geq t_1$ kad je poticaj jednak nuli. Također, budući da jedinični impuls $\delta(t-x)$ u promatranom primjeru "vadi" svaku funkcijsku vrijednost poticaja iz $t \geq t_1$, to je prvi integral u uglatoj zagradi identički jednak nuli, jer je u promatranom intervalu $t \geq t_1$, $u(t) \equiv 0$! Dakle

$$i(t) = -\frac{E}{R}\int_0^{t_1}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t-x}{\tau}}dx = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{t_1}{\tau}}\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad ; t \geq t_1$$

čime je zadatak riješen. Da smo tražili odziv u intervalu $0 \leq t \leq t_1$ konvolucijski integral bi se računao prema izrazu

$$i(t) = \int_0^t u(x)h(t-x)dx.$$