XX. PREDAVANJE

Definicija jednostrane Laplaceove transformacije. Pojam kompleksne frekvencije. Izbor donje i gornje granice definicijskog integrala. Osnovna svojstva Laplaceove transformacije. Primjer rješavanja diferencijalne jednadžbe prvog reda. Rastav odziva na slobodni odziv i prisilni odziv. Izbor $t = -0$ kao donje granice definicijskog integrala. Nužnost izbora $t = -0$ za slučaj loše definirane mreže. Pojam racionalne funkcije. Faktorizirani oblik racionalne funkcije. Polovi i nule. Rastav prikladne racionalne funkcije na parcijalne razlomke. Određivanje reziduuma pola : korijeni polinoma $Q(s)$ su jednostruki, korijeni polinoma $Q(s)$ su višestruki. Primjeri rastava. Veza između Laplaceove transformacije i fazorske transformacije.

20. OSNOVNA SVOJSTVA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

20.1 DEFINICIJA JEDNOSTRANE LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE (P.S.Laplace, 1779.)

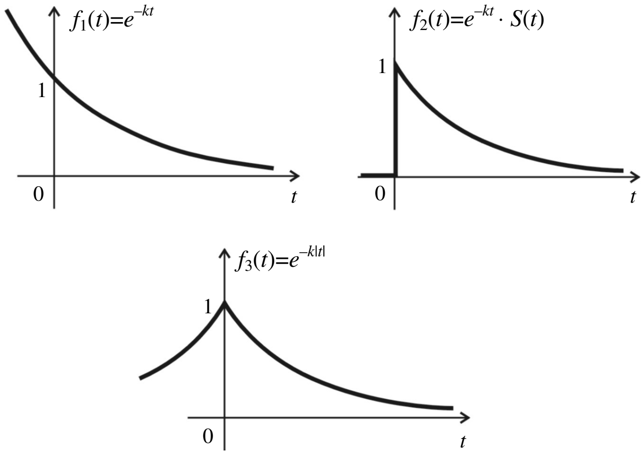
Jednostrana Laplaceova transformacija omogućuje da se integro-diferencijalne jednadžbe mreže pretvore u *algebarske jednadžbe,* dopušta u analizi *razne vrste poticaja* i omogućuje dobivanje *potpunog odziva.*

Pod ***jednostranom Laplaceovom transformacijom*** ($\mathscr{L}$ - transformacijom) smatramo *operator* kojim se neka funkcija $f(t)$, definirana u vremenskom području, transformira u funkciju $F(s)$ kompleksne varijable $s = \sigma + j\omega$ prema formuli

$$F(s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] = \int_{-0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \qquad (1)$$

Dimenzija kompleksne varijable s je [sek^{-1}] pa se ona često naziva i ***kompleksna frekvencija***. Primjenom Laplaceove transformacije zadaća analize u vremenskom području prevodi se u zadaću analize u frekvencijskom području.

a) Donja granica integrala je $t = -0$. Sve što je za analizu važno počinje s tim trenutkom. Oblik funkcije $f(t)$ u intervalu $-\infty < t \le -0$ nije važan. Tako je primjerice Laplaceova transformacija triju funkcija na slici 20.1 jednaka.



Sl. 20.1 Tri različite vremenske funkcije s istom Laplaceovom transformacijom.

Izborom $t = -0$ obuhvaćeni su "prirodni" početni uvjeti mreže. Da je kao donja granica uzeto $t = +0$, moralo bi se voditi računa o zakonima komutacije (poglavlje 6).

b) Gornja granica integrala je $t = \infty$. Integral (1) za $t = \infty$ mora konvergirati. Za funkcije $f(t)$ koje su bitne u elektrotehnici, taj uvjet je uvijek zadovoljen. To su tzv. *funkcije eksponencijalnog reda,* tj. to su one funkcije za koje se uvijek može naći realna konstanta a takva da je

$$\lim_{t\to\infty}\left|f(t)e^{-at}\right| = 0$$

Tako je primjerice funkcija e^{kt} eksponencijalnog reda, dok funkcija $f(t) = e^{t^2}$ to nije !

20.2 OSNOVNA SVOJSTVA LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

Navest će se samo ona svojstva Laplaceove transformacije koja su bitna za analizu linearnih vremenski nepromjenljivih mreža, i to bez dokaza.

a) ***Jednoznačnost.*** Ovo znači da ako se za neku zadanu funkciju kompleksne varijable s, recimo $F(s)$, zna da je Laplaceova transformacija neke vremenske funkcije, recimo $f(t)$, i ako neka druga vremenska funkcija $g(t)$ ima također funkciju $F(s)$ kao svoju Laplaceovu transformaciju, onda je razlika između funkcija $f(t)$ i $g(t)$ trivijalna.

Isključivši trivijalne slučajeve, jednoznačnost jamči da je neka vremenska funkcija jednoznačno specificirana svojom Laplaceovom transformacijom. Ako je

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$$

onda je i $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$, tj. funkcija $f(t)$ jest inverzna Laplaceova transformacija od $F(s)$.

b) ***Linearnost***

$$\mathscr{L}[af_1(t)+bf_2(t)]=a\mathscr{L}[f_1(t)]+b\mathscr{L}[f_2(t)] \quad ; \quad a \text{ i } b \text{ su konstante}$$

c) ***Deriviranje***

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(-0) - s^{n-2}f'(-0) - \ldots f^{(n-1)}(-0) \qquad (2)$$

d) ***Integriranje***

$$\mathcal{L}\left[\int_{-0}^{t} f(x)dx\right]=\frac{1}{s}F(s) \qquad (3)$$

e) ***Vremenski pomak***

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\cdot S(t-a)\right]=e^{-as}F(s) \qquad (4)$$

f) ***Frekvencijski pomak***

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a) \qquad (5)$$

g) ***Periodička funkcija***

$$\mathcal{L}\left[f(t)=f(t+T)\right]=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}} \quad ; \qquad F_1(s)=\int_{-0}^{T} f(t)e^{-st}dt \qquad (6)$$

h) ***Promjena vremenskog i frekvencijskog mjerila*** *(skaliranje)*

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad ; \; a>0 \qquad (7)$$

i) ***Množenje sa t***

$$\mathcal{L}\left[tf(t)\right]=-\frac{dF(s)}{ds} \qquad (8)$$

j) ***Konvolucija***

$$\mathcal{L}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=F_1(s)\cdot F_2(s) \qquad (9)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-0}^{t} f_1(x)f_2(t-x)dx=\int_{-0}^{t} f_1(t-x)f_2(x)dx$$

k) ***Početna vrijednost***

$$f(+0)=\lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad (10)$$

l) ***Konačna vrijednost***

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s) \qquad (11)$$

Primjer :

Riješite diferencijalnu jednadžbu $\frac{dx}{dt}+2x=4S(t)$; $x(-0)=4$.

Rješenje:

Ako označimo da je $\mathcal{L}\left[x(t)\right]=X(s)$, to će u skladu sa (2) lijeva strana diferencijalne jednadžbe biti jednaka

$$sX(s)-x(-0)+2X(s) \quad \text{tj.} \quad (s+2)X(s)-4$$

dok je na desnoj strani funkcija jediničnog skoka, Laplaceovu transformaciju koje određujemo prema izrazu (1), tj.

$$\mathcal{L}\left[S(t)\right]=\int_{-0}^{\infty} S(t)e^{-st}dt=\int_{-0}^{+0} S(t)e^{-st}dt+\int_{+0}^{\infty} 1\cdot e^{-st}dt=0+\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{+0}^{\infty}$$

te dobivamo da je

$$\mathcal{L}\left[S(t)\right]=\frac{1}{s} \qquad (12)$$

Zadana diferencijalna jednadžba transformirana je u algebarsku

$$(s+2)X(s)-4=\frac{4}{s}$$

odnosno

$$X(s)=\frac{4}{s(s+2)}+\frac{4}{s+2}$$

Opažamo da se odziv $X(s)$ u frekvencijskom području sastoji od dvije komponente i to jedne $4/[s(s+2)]$ nastale zbog djelovanja poticaja (*prisilni odziv*) i druge $4/(s+2)$ nastale zbog djelovanja početnog uvjeta (*slobodni odziv*). Vrijedi

$$X(s)=\frac{4}{s(s+2)}+\frac{4}{s+2}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+2}+\frac{4}{s+2}$$

što se koristeći (5) lako vraća u vremensko područje, tj.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=x(t)=2\cdot S(t)-2e^{-2t}S(t)+4e^{-2t}S(t)$$

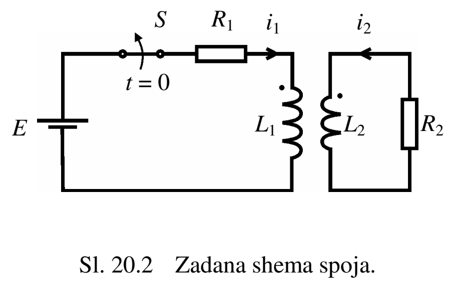
odnosno

$$x(t)=2(1+e^{-2t})S(t)$$

20.3 IZBOR t = − 0 KAO DONJE GRANICE DEFINICIJSKOG INTEGRALA

Pokažimo na jednom jednostavnom primjeru kako izbor donje granice definicijskog integrala Laplaceove transformacije utječe na analizu.

Neka je zadana mreža sheme spoja prema slici 20.2. U trenutku t = 0 trenutno isklopi sklopka S. Odredite valni oblik struje $i_2(t)$ za $t \geq +0$, ako je do trenutka t = 0 u krugu vladalo ustaljeno stanje.



Sl. 20.2 Zadana shema spoja.

Jednadžbe mreže su

$$E = R_1 i_1 + u_S + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \tag{13a}$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \tag{13b}$$

a početni uvjeti su

$$i_1(-0) = \frac{E}{R_1} \quad ; \quad i_2(-0) = 0$$

Budući da sklopka S trenutno isklopi u trenutku t = 0, očigledno je

$$i_1(t) \equiv 0 \quad ; \quad t \geq +0$$

a) ***Donja granica definicijskog integrala t = – 0.***

Označimo da je $\mathscr{L}[i_1(t)] = I_1(s)$, $\mathscr{L}[i_2(t)] = I_2(s)$, te uzevši u obzir (2), diferencijalna jednadžba (13b) prelazi u algebarsku

$$0 = R_2 I_2(s) + sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(-0) + sMI_1(s) - Mi_1(-0)$$

Zbog $i_1(t) \equiv 0$ za $t \geq +0$ bit će i $I_1(s) \equiv 0$, te uz $i_2(-0) = 0$ proizlazi da je

$$0 = R_2 I_2(s) + sL_2 I_2(s) - Mi_1(-0)$$

odnosno

$$I_2(s) = \frac{Mi_1(-0)}{L_2} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \quad ; \quad \tau = \frac{L_2}{R_2}$$

odakle se lako dobiva rješenje

$$i_2(t) = \frac{Mi_1(-0)}{L_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{M}{L_2} \cdot \frac{E}{R_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ; \quad t \geq +0$$

b) ***Donja granica definicijskog integrala t = +0***

Sada vrijedi da je

$$0 = R_2 I_2(s) + sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(+0) + sMI_1(s) - Mi_1(+0)$$

odnosno uzevši u obzir da je $I_1(s) \equiv 0$ i $i_1(+0) = 0$

$$0 = R_2 I_2(s) + sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(+0)$$

tj.

$$I_2(s) = i_2(+0) \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Vraćanjem u vremensko područje dobivamo da je

$$i_2(t) = i_2(+0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ; \quad t \geq +0$$

što znači da postavljenu zadaću još *nismo riješili* budući da ne znamo $i_2(+0)$! Zadana mreža je loše definirana i za određivanje $i_2(+0)$ valja primijeniti zakone komutacije izložene u poglavlju 6.4.

Zaključak :
Ako je analizirana mreža *loše definirana* samo *izbor* $t = -0$ kao donje granice definicijskog integrala omogućava da dobijemo rješenje. Ako je mreža *dobro definirana*, te ne postoji diskontinuitet početnih uvjeta, *svejedno* je je li kao donja granica definicijskog integrala odabrano $t = -0$ ili $t = +0$.

20.4 RASTAV RACIONALNE FUNKCIJE NA PARCIJALNE RAZLOMKE (O.Heaviside, 1893.)

U frekvencijskom području rješenje mreže često se dobiva u obliku ***racionalne funkcije***

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}$$

gdje su $P(s)$ i $Q(s)$ polinomi varijable s, a koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ te $b_0, b_1, \ldots, b_m$ su realni brojevi. Racionalna funkcija $F(s)$ se uvijek može prikazati u *faktoriziranom obliku*

$$F(s) = K \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_n)} \tag{14}$$

gdje se svi korijeni polinoma brojnika z_i (i=1, 2, …, m) nazivaju ***nulama*** racionalne funkcije $F(s)$, a svi korijeni polinoma nazivnika p_j (j=1, 2, …, n) ***polovima*** racionalne funkcije F(s). Polovi su *jednostruki* ako su svi međusobno različiti. J-ti pol je *reda r* ako se r-puta pojavljuje u faktoriziranom obliku polinoma $Q(s)$, tj. kao $(s - p_j)^r$.

Racionalna funkcija je *prikladna* ako je $m \leq n$. Ako to nije slučaj, dijeljenjem brojnika s nazivnikom dobiva se

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \overline{P}(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

gdje je ostatkom dijeljenja sigurno dobivena racionalna funkcija $R(s)$ / $Q(s)$. U nastavku smatrat ćemo da je svaka promatrana racionalna funkcija $F(s)$ prikladna.

20.4.1 Korijeni polinoma $Q(s)$ su jednostruki

U ovom su slučaju polovi racionalne funkcije $F(s)$ svi međusobno različiti te vrijedi da je

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{K_j}{s - p_j} \tag{15}$$

gdje se K_j naziva ***reziduumom pola*** p_j i određuje iz izraza

$$K_j = (s - p_j)F(s)\Big|_{s=p_j} \tag{16}$$

Zaista, ako se izraz (15) pomnoži sa $(s - p_j)$, to se dobiva da je

$$(s - p_j)F(s) = K_j + (s - p_j)\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s - p_i} \qquad ; \; i \neq j$$

odakle očigledno proizlazi (16), ako se stavi da je $s = p_j$!

Primjer :
Rastavite na parcijalne razlomke racionalnu funkciju

$$F(s) = \frac{2s+3}{(s+1)\,(s+2)}$$

Rješenje:
Zadana racionalna funkcija napiše se u obliku

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$$

a u skladu sa (16) dobivamo da je

$$K_1 = (s+1)\cdot\frac{2s+3}{(s+1)\,(s+2)} = \frac{2s+3}{s+2}\Big|_{s=-1} = \frac{-2+3}{-1+2} = 1$$

$$K_2 = (s+2)\cdot\frac{2s+3}{(s+1)\,(s+2)} = \frac{2s+3}{(s+1)}\Big|_{s=-2} = \frac{-4+3}{-2+1} = 1$$

što znači da je

$$F(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

20.4.2 Korijeni polinoma *Q*(*s*) su višestruki

Pretpostavimo da je korijen polinoma $Q(s)$ *r-struk,* dakle da je

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{R(s)}{(s-s_j)^{\,r}} = \sum_{i=1}^{r}\frac{K_{ji}}{(s-s_j)^{\,i}} \tag{17}$$

gdje je

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\cdot(s-s_j)^{\,r}$$

Ako se izraz (17) pomnoži sa $(s-s_j)^{\,r}$, to dobivamo da je

$$R(s) = K_{j1}(s-s_j)^{\,r-1} + K_{j2}(s-s_j)^{\,r-2} + \ldots + K_{jr} \tag{18}$$

Ako se u ovaj izraz stavi da je $s = s_j$, nestaju svi članovi osim K_{jr}. U idućem koraku derivira se izraz (18) po *s*. Član K_{jr} nestaje, a član K_{jr-1} se može odrediti ako se u derivirani izraz stavi da je $s = s_j$. Da bi se odredio n-ti član, dakle K_{jn}, treba izraz (18) derivirati (*r-n*)-puta i staviti da je $s = s_j$. Dakle :

$$\begin{aligned} K_{jn} &= \frac{1}{(r-n)\,!}\frac{d^{\,r-n}R(s)}{ds^{\,r-n}}\Big|_{s=s_j} = \\ &= \frac{1}{(r-n)\,!}\frac{d^{\,r-n}}{ds^{\,r-n}}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}(s-s_j)^{\,r}\right]_{s=s_j} \end{aligned} \tag{19}$$

Primjer:
Rastavite na parcijalne razlomke racionalnu funkciju

$$F(s) = \frac{2s^2+3}{(s+1)^3}$$

Rješenje:
Rješenje se traži u obliku

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3}$$

Množenjem ovog izraza sa $(s+1)^3$ dobivamo da je

$$R(s) = 2s^2 + 3 = K_{11}(s+1)^2 + K_{12}(s+1) + K_{13}$$

odakle odmah proizlazi

$$K_{13} = (2s^2+3)\Big|_{s=-1} = 5$$

U idućem koraku derivira se $R(s)$ te dobivamo

$$4s = K_{11}\cdot 2(s+1) + K_{12}$$

odnosno za $s = -1$ da je

$$K_{12} = 4(-1) = -4$$

Ponovnim deriviranjem dobivamo

$$4 = 2K_{11}$$

odnosno da je

$K_{11} = 2$, te je konačni rezultat

$$F(s) = \frac{2s^2+3}{(s+1)^3} = \frac{2}{s+1} - \frac{4}{(s+1)^2} + \frac{5}{(s+1)^3}$$

Primjer :
Rastavite na parcijalne razlomke racionalnu funkciju

$$F(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2\cdot(s+3)}$$

Rješenje:
U ovom slučaju valja kombinirati pravila za određivanje koeficijenata rastava danih izrazima (16) i (19). Proizlazi

$$F(s)=\frac{K_{11}}{s+1}+\frac{K_{12}}{(s+1)^2}+\frac{K_2}{s+3}$$

U skladu s izrazom (16) bit će

$$K_2=\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}\cdot(s+3)=\left.\frac{s+2}{(s+1)^2}\right|_{s=-3}=-\frac{1}{4}$$

Ako se izraz za $F(s)$ pomnoži sa $(s+1)^2$, dobivamo da je

$$\frac{s+2}{s+3}=K_{11}(s+1)+K_{12}+\frac{(s+1)^2}{s+3}K_2 \tag{20}$$

Stavi li se u jednadžbu (20) da je $s = -1$, proizlazi da je $K_{12}=\frac{1}{2}$, dok se koeficijent K_{11} dobiva tako da se jednadžba (20) prvo derivira, dakle

$$\frac{(s+3)\cdot 1-(s+2)\cdot 1}{(s+3)^2}=K_{11}+K_2\frac{(s+3)\cdot 2\cdot(s+1)-(s+1)^2\cdot 1}{(s+3)^2}$$

i onda u taj izraz uvrsti da je $s = -1$. Dobivamo da je $K_{11}=\frac{1}{4}$, odnosno

$$F(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{1}{4(s+1)}+\frac{1}{2(s+1)^2}-\frac{1}{4(s+3)}$$

20.5 VEZA IZMEĐU LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE I FAZORSKE TRANSFORMACIJE

Ako su svi *početni uvjeti* u trenutku $t = -0$ *jednaki nuli*, pravila Laplaceove transformacije *identična* su pravilima fazorske transformacije s tim da se *varijabla s* zamijeni sa $j\omega$.

Pokažimo to na primjeru serijskog *RLC* kruga, opisanog diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\alpha\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C=\omega_0^2u(t)$$

a) ***Fazorska transformacija.*** Pretpostavimo da je $u_C(t)\leftrightarrow\dot{U}_C$, $u(t)\leftrightarrow\dot{U}$. S pomoću pravila fazorske transformacije (odsječak 10.3) zadana diferencijalna jednadžba prelazi u algebarsku jednadžbu

$$\left[(\omega_0^2-\omega^2)+j2\alpha\omega\right]\dot{U}_C=\omega_0^2\dot{U} \tag{21}$$

uz pretpostavku da je poticaj $u(t)$ jednoharmonijski frekvencije ω.

b) ***Laplaceova transformacija.*** Pretpostavimo da je $\mathscr{L}[u_C(t)]=U_C(s)$, $\mathscr{L}[u(t)]=U(s)$. S pomoću pravila Laplaceove transformacije (odsječak 20.2), uzimajući u obzir da su svi početni uvjeti jednaki nuli, tj.

$$u_C(-0)=0\ ;\ \left.\frac{du_C}{dt}\right|_{-0}=\dot{u}_C(-0)=0$$

zadana diferencijalna jednadžba prelazi u algebarsku jednadžbu

$$\left[s^2+2\alpha s+\omega_0^2\right]U_C(s)=\omega_0^2U(s) \tag{22}$$

Opažamo da su jednadžbe (21) i (22) *potpuno istog oblika* ako se stavi da je $s = j\omega$.

Obje jednadžbe, unatoč istom obliku, imaju *posve različita značenja.* Fazorska jednadžba (21) povezuje dva fazora $\dot{U}_C$ *i* $\dot{U}$ u mreži u kojoj je uspostavljeno *sinusoidalno ustaljeno stanje.* S druge strane, jednadžba (22) određuje u frekvencijskom području *prisilni odziv* iste mreže na *bilo koji poticaj.* (Jedino je ograničenje da postoji Laplaceova transformacija poticaja !).

Pretpostavimo li da početni uvjeti nisu jednaki nuli primjenom Laplaceove transformacije na zadanu diferencijalnu jednadžbu dobili bi algebarsku jednadžbu

$$s^2U_C(s)-su_C(-0)-\dot{u}_C(-0)+2\alpha\left[sU_C(s)-u_C(-0)\right]+$$
$$+\omega_0^2U_C(s)=\omega_0^2U(s)$$

odnosno u odzivu bi postojale dvije komponente

$$U_C(s)=\underbrace{\frac{\omega_0^2}{s^2+2\alpha s+\omega_0^2}U(s)}_{\text{prisilni odziv}}-\underbrace{\frac{(s+2\alpha)u_C(-0)+\dot{u}_C(-0)}{s^2+2\alpha s+\omega_0^2}}_{\text{slobodni odziv}}$$

i formalna sličnost između dviju transformacija se gubi.