XXI. PREDAVANJE

Kirchhoffovi zakoni za transformirane napone i struje. Konstitutivne relacije elemenata mreže u frekvencijskom području: otpor, kapacitet, induktivitet, dvonamotni transformator. Pojam transformirane impedancije i admitancije. Dva načina prikaza reaktivnih elemenata. Nadomjesne sheme spoja reaktivnih elemenata. Serijsko i paralelno spajanje elemenata mreže. Interpretacija početnih uvjeta u transformiranoj mreži. Usklađivanje nadomjesnih shema spoja reaktivnih elemenata s odabranom metodom analize. Nužnost poznavanja zakona komutacije pri analizi loše definiranih mreža.

21. ANALIZA MREŽA S POMOĆU LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

21.1 KIRCHHOFFOVI ZAKONI

Napon $u_k(t)$ i struja $i_k(t)$ k-te grane neke mreže mogu se s pomoću Laplaceove transformacije, izraz (20.1), transformirati u funkcije kompleksne varijable s,

$$U_k(s)=\mathscr{L}\,[u_k(t)] \qquad ; \qquad I_k(s)=\mathscr{L}\,[i_k(t)].$$

koje se uobičajeno zovu *transformiranim naponom* i *transformiranom strujom* k-te grane neke *transformirane mreže*.

Budući da je Laplaceova transformacija *linearna transformacija*, to za transformirane napone i struje vrijede Kirchhoffovi zakoni.

a) Za j-tu petlju transformirane mreže vrijedi Kirchhoffov zakon napona, tj.

$$\sum_{j=1}^{b} b_{jk} U_k(s) = 0 \tag{1}$$

gdje je b – ukupni broj grana transformirane mreže, $U_k(s)$ transformirani napon k-te grane a b_{jk} je koeficijent s istim vrijednostima kao u izrazu (1.5).

b) Kirchhoffov zakon struje se obično iskazuje u jednom od tri oblika: za j-tu napravu, izraz (1.3); za j-ti čvor, izraz (1.4); za j-ti rez, izraz (17.1). Jasno je da svaki od ovih oblika ostaje očuvan nakon linearne transformacije tako da iskaz Kirchhoffovog zakona struje, recimo za j-ti čvor glasi

$$\sum_{j=1}^{b} a_{jk} I_k(s) = 0 \tag{2}$$

gdje je a_{jk} koeficijent s istim vrijednostima kao u izrazu (1.4), a $I_k(s)$ je transformirana struja k-te grane.

Napomena: Kao što ni fazori napona i struje nemaju nikakav fizikalni smisao tako ni transformirani naponi i struje nisu naponi niti struje. Dimenzija transformiranog napona $U_k(s)$ je Vs, dakle posjeduje dimenziju fizikalne veličine toka, a dimenzija transformirane struje $I_k(s)$ je As, dakle posjeduje dimenziju fizikalne veličine naboja.

21.2 KONSTITUTIVNE RELACIJE ELEMENATA MREŽE U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

21.2.1 *Otpor*

Linearni vremenski nepromjenljivi (L/VNP) otpor definiran u vremenskom području konstitutivnom relacijom $u_R(t) = Ri_R(t)$ bit će u frekvencijskom području definiran relacijom

$$U_R(s) = RI_R(s) \tag{3}$$

Matematički izraz (3) ima isti oblik kao i Ohmov zakon za "napon" $U_R(s)$ na "otporu" R kroz koji prolazi "struja" $I_R(s)$.

U transformiranoj mreži, dakle u frekvencijskom području, otpor se može prikazati na isti način, dakle istim simbolom, kao i u vremenskom području. Pri tome se kvocijent od $U_R(s)$ i $I_R(s)$ naziva *transformiranom impedancijom otpora*

$$\frac{U_R(s)}{I_R(s)} = R = Z_R(s) \tag{4a}$$

a njegova recipročna vrijednost *transformiranom admitancijom otpora*

$$\frac{I_R(s)}{U_R(s)} = G = Y_R(s) \tag{4b}$$

21.2.2 *Kapacitet*

Ako se struja $i_C(t)$ shvati kao poticaj a napon na kapacitetu $u_C(t)$ kao odziv, linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet je definiran sljedećom konstitutivnom relacijom u vremenskom području

$$u_C(t) = \int_{-\infty}^{t} i_C(x)dx = u_C(-0) + \int_{-0}^{t} i_C(x)dx$$

Primjenom pravila o integriranju, izraz (20.3), ova relacija prelazi u frekvencijskom području u oblik

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_C(-0)}{s} \tag{5a}$$

Matematički izraz (5a) ima isti oblik kao i Ohmov zakon za "napon" $U_C(s)$ na "otporu" $1/sC$ kroz koji prolazi "struja" $I_C(s)$ i u seriju s kojim je uključen "naponski izvor" $u_C(-0)/s$, slika 21.1.b. Ovaj "otpor" se naziva *transformiranom impedancijom kapaciteta*

$$\frac{U_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC} = Z_C(s)$$

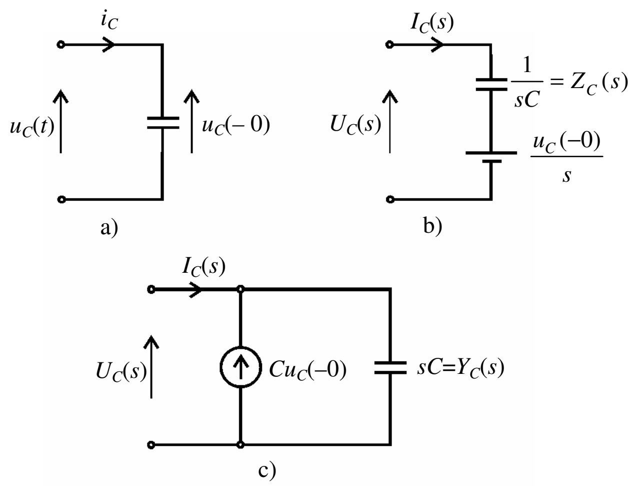
Ako se u jednadžbi (5a) transformirana struja $I_C(s)$ izrazi s pomoću transformiranog napona $U_C(s)$, tj. ako je

$$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(-0) \qquad (5b)$$

onda je moguć još jedan prikaz kapaciteta i to s pomoću *transformirane admitancije kapaciteta*

$$\frac{I_C(s)}{U_C(s)} = sC = Y_C(s)$$

kako je prikazano na slici 21.1c.



Sl. 21.1 Prikaz kapaciteta
a) u vremenskom području,
b) u frekvencijskom području transformiranom impedancijom $Z_C(s)$,
c) u frekvencijskom području transformiranom admitancijom $Y_C(s)$.

21.2.3 *Induktivitet*

Ako se struja $i_L(t)$ shvati kao poticaj, a napon na induktivitetu $u_L(t)$ kao odziv, linearni vremenski nepromjenljivi induktivitet je definiran sljedećom konstitutivnom relacijom u vremenskom području

$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Primjenom pravila o deriviranju, izraz (20.2), ova relacija u frekvencijskom području prelazi u oblik

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(-0) \qquad (6a)$$

gdje se kvocijent

$$\frac{U_L(s)}{I_L(s)} = Z_L(s) = sL$$

naziva *transformiranom impedancijom induktiviteta.*

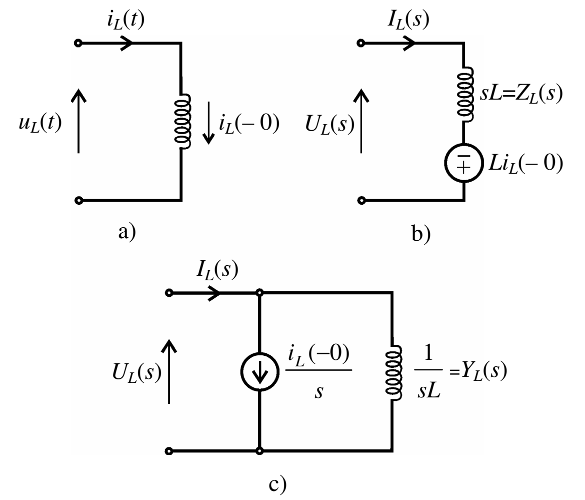
Ako se u jednadžbi (6a) transformirana struja $I_L(s)$ izrazi s pomoću transformiranog napona $U_L(s)$, tj. ako je

$$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{i_L(-0)}{s} \qquad (6b)$$

onda je moguć još jedan prikaz induktiviteta i to s pomoću transformirane admitancije induktiviteta

$$\frac{I_L(s)}{U_L(s)} = \frac{1}{sL} = Y_L(s)$$

kako je prikazano na slici 21.2c



Sl. 21.2 Prikaz induktiviteta
a) u vremenskom području,
b) u frekvencijskom području transformiranom impedancijom $Z_L(s)$,
c) u frekvencijskom području transformiranom admitancijom $Y_L(s)$.

21.2.4 *Dvonamotni transformator*

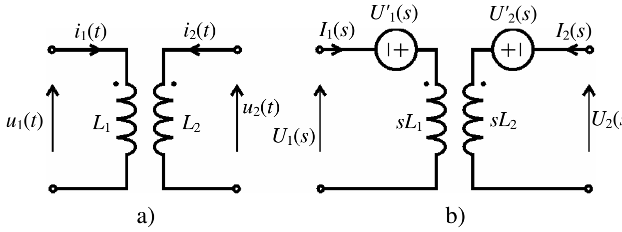
Linearni vremenski nepromjenljivi dvonamotni transformator definiran je ovim konstitutivnim relacijama

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$
$$u_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

koje u frekvencijskom području prelaze u jednadžbe

$$U_1(s) = sL_1I_1(s) - L_1i_1(-0) + sMI_2(s) - Mi_2(-0)$$
$$U_2(s) = sMI_1(s) - Mi_1(-0) + sL_2I_2(s) - L_2i_2(-0)$$

Na slici 21.3 dan je uobičajeni način prikaza linearnog vremenski nepromjenljivog dvonamotnog transformatora u frekvencijskom području. Pri tome su "naponski izvori" $U_1'(s)$ i $U_2'(s)$ dani izrazima



Sl. 21.3 Prikaz dvonamotnog transformatora
a) u vremenskom području
b) u frekvencijskom području.

$$U_1'(s) = L_1 i_1(-0) + M i_2(-0)$$
$$U_2'(s) = L_2 i_2(-0) + M i_1(-0)$$

te konstitutivne relacije dvonamotnog transformatora u frekvencijskom području glase:

$$U_1(s) + U_1'(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s)$$
$$U_2(s) + U_2'(s) = sMI_1(s) + sL_2 I_2(s) \qquad (7)$$

Napomena: U analizi linearnih vremenski nepromjenljivih mreža, pojmovi naboja i toka *nisu potrebni*. Zbog toga ni konstitutivne relacije reaktivnih elemenata u frekvencijskom području nisu iskazane s pomoću transformiranih naboja i tokova.

21.3 SERIJSKO I PARALELNO SPAJANJE ELEMENATA MREŽE

Svaki reaktivni element mreže u frekvencijskom području ponaša se kao ***otpor***, tj. za njega vrijedi "Ohmov zakon", ali uz uvjet da je *mreža "mrtva"*, tj. da su svi početni uvjeti (struje kroz induktivitete, naponi na kapacitetima) jednaki nuli.

Zbog toga za ***impedanciju serijskog spoja*** *N* elemenata mreže *Z*(*s*) vrijedi da je

$$Z(s) = \sum_{j=1}^{N} Z_j(s) \qquad (8)$$

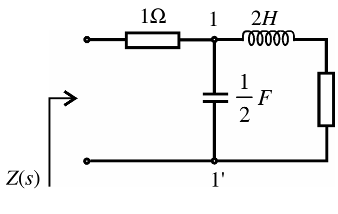
dok za ***admitanciju paralelnog spoja*** *M* elemenata mreže *Y*(*s*) vrijedi da je

$$Y(s) = \sum_{j=1}^{M} Y_j(s) \qquad (9)$$

gdje su sa $Z_j(s)$ i $Y_j(s)$ označene impedancija odnosno admitancija *j*-tog elementa mreže.

Kombinacijom pravila (8) i (9) svaka se jednoprilazna mreža može postupno svesti na jednu nadomjesnu impedanciju ili admitanciju.

Primjer: Odredite impedanciju mreže sheme spoja prema slici 21.4.



Sl. 21.4 Zadana jednoprilazna mreža.

Rješenje:

Impedancija serijskog spoja otpora od 1Ω i induktiviteta od 2*H* je 2*s*+1, dok je admitancija dijela mreže između stezaljki 1 i 1'

$$Y_1(s) = \frac{s}{2} + \frac{1}{2s+1} = \frac{2s^2+s+2}{2(2s+1)}$$

odakle proizlazi da je impedancija zadane mreže

$$Z(s) = 1 + \frac{1}{Y_1(s)} = 1 + \frac{2(2s+1)}{2s^2+s+2} = \frac{2s^2+5s+4}{2s^2+s+2}$$

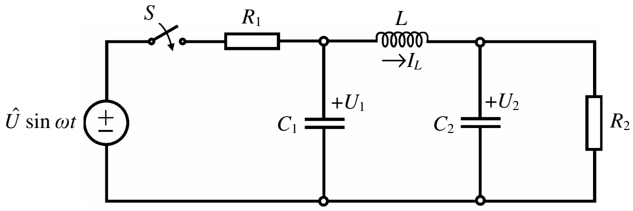
21.4 TRANSFORMIRANJE MREŽA U FREKVENCIJSKO PODRUČJE

Općenito mreža se sastoji od više nezavisnih naponskih i strujnih izvora i kombinacije više elemenata mreže. Svaki od elemenata mreže može se na temelju prethodno izloženog transformirati u frekvencijsko područje.

Za istu mrežu u vremenskom području, transformirane mreže mogu biti različite budući da se svaki reaktivni element može prikazati na dva načina, tj. s pomoću dvije nadomjesne sheme spoja. Važno je uočiti da se u transformiranoj mreži ***početni uvjeti*** tretiraju na *potpuno isti način* kao i ***vanjski*** (nezavisni) ***izvori***, a koja će se od nadomjesnih shema spoja reaktivnih elemenata upotrijebiti ovisi uglavnom o tome kojom će se metodom analize rješavati transformirana mreža.

Transformirana mreža ponaša se sada kao ***otporna mreža***. Ako se transformirana mreža rješava s pomoću metode jednadžbe struja petlji, onda je zgodno sve početne uvjete prikazati kao "naponske izvore". Nasuprot tome ako se upotrijebi metoda jednadžbi napona čvorova (jednadžbi rezova), onda je zgodnije sve početne uvjete prikazati kao "strujne izvore".

Primjer: U mreži sheme spoja prema slici 21.5 u trenutku *t* = 0 uklopi sklopka. Poznate su početne vrijednosti struja i napona. Nacrtajte transformiranu mrežu u obliku najzgodnijem za analizu s pomoću metode jednadžbi struja petlji.



Sl. 21.5 Zadana mreža u vremenskom području. Početni uvjeti su $u_{C1}(-0) = U_1$, $u_{C2}(-0) = U_2$, $i_L(-0) = I_L$.

Rješenje:

Budući da je od trenutka *t* = 0 sklopka *S* uklopljena a da je Laplaceova transformacija definirana od trenutka *t* = 0 (mreža je dobro definirana!) u transformiranoj mreži ne treba prikazati sklopku.

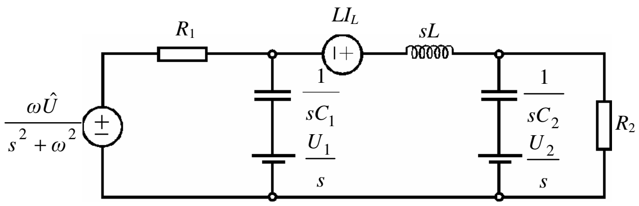
Valni oblik napona naponskog izvora prikažimo na ovaj način

$$u(t) = \hat{U}\sin\omega t = \hat{U}\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad ; t \geq 0$$

te u skladu s pravilom o frekvencijskom pomaku, izraz (20.5), dobivamo za transformirani naponski izvor da je

$$U(s) = \hat{U}\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{\omega\hat{U}}{s^2+\omega^2} \qquad (10)$$

Za analizu transformirane mreže s pomoću metode jednadžbi struja petlji najzgodnije je sve početne uvjete prikazati kao "naponske izvore", te kao rješenje dobivamo mrežu sheme spoja prema slici 21.6.



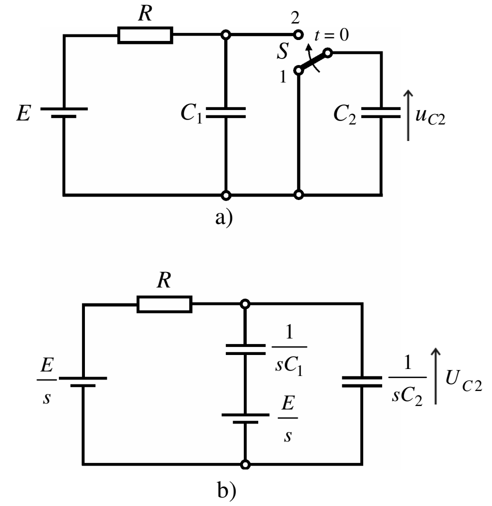
Sl. 21.6 Mreža sheme spoja prema slici 21.5 transformirana u frekvencijsko područje.

21.5 ANALIZA LOŠE DEFINIRANIH MREŽA

U poglavlju 20.3 pokazano je na jednom primjeru kako se izborom $t = -0$ kao donje granice definicijskog integrala Laplaceove transformacije mogu analizirati i loše definirane mreže. To je bitna značajka primjene Laplaceove transformacije u analizi mreža. Općenito vrijedi tvrdnja:

Za razliku od analize mreža u vremenskom području, pri analizi linearnih vremenski nepromjenljivih mreža u frekvencijskom području zakoni komutacije su automatski uključeni u analizu, tj. ne treba ih posebno razmatrati, neovisno o tome je li analizirana mreža dobro ili loše definirana.

Primjer: Do trenutka $t = 0$ mreža sheme spoja prema slici 21.7a bila je u ustaljenom stanju. U trenutku $t = 0$ sklopka S trenutno preklopi iz položaja 1 u položaj 2. Odredite napon na kapacitetu C_2 za $t \geq +0$.



Sl. 21.7 a) Zadana mreža u vremenskom području.
b) Zadana mreža u frekvencijskom području.

Rješenje:
Iz analize transformirane mreže, slika 21.7b, lako se dobije da je

$$U_{C2}(s)=\frac{E}{\tau\cdot s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}+\frac{C_1}{C_1+C_2}\cdot\frac{E}{s+\frac{1}{\tau}};\ \tau=R(C_1+C_2)$$

odakle je

$$u_{C2}(t)=E\left[1-\frac{C_2}{C_1+C_2}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

U skladu s izrazom (20.10) provjerimo još početnu vrijednost napona na kapacitetu C_2 u trenutku $t = +0$. Vrijedi da je

$$u_{C2}(+0)=\lim_{s\to\infty} sU_{C2}(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{E}{\tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}+$$

$$+\lim_{s\to\infty}\frac{C_1E}{C_1+C_2}\frac{s}{s+\frac{1}{\tau}}=\frac{C_1}{C_1+C_2}E$$

što odgovara rezultatu dobivenom iz zakona komutacije za loše definirane mreže objašnjenom u odsječku 6.4.3.