# XXII. PREDAVANJE

**Pojam funkcije mreže. Mreža kao procesor signala. Veza između impulsnog odziva i funkcije mreže. Vrste funkcija mreže: ulazne i prijenosne funkcije mreže. Fizikalni smisao polova funkcije mreže. Fizikalni smisao nula funkcije mreže. Prirodne frekvencije varijable mreže *x*(*t*). Ovisnost prirodnih frekvencija o vrsti poticaja. Svojstva ulaznih funkcija mreže za mreže sastavljene od pasivnih elemenata. Svojstva prijenosnih funkcija mreže za mreže sastavljene od pasivnih elemenata. Primjer aktivne mreže realizirane s pomoću zavisnih izvora.**

## 22. FUNKCIJE MREŽE

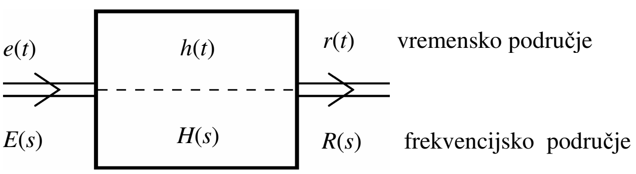
### 22.1 DEFINICIJA FUNKCIJE MREŽE

Funkcija mreže uvedena je u poglavlju 10.4 na primjeru jednoharmonijske mreže u ustaljenom stanju. Tamo uvedena funkcija mreže $H(j\omega)$ jest kompleksni broj koji pomnožen s fazorom poticaja daje fazor odziva. Poznavanje funkcije mreže omogućilo nam je da saznamo kako se promjenom frekvencije poticaja mijenja amplituda i faza odziva. Važno je naglasiti da je u mreži kao poticaj djelovao samo *jedan nezavisni*, bilo naponski, bilo strujni izvor.

Ovu definiciju funkcije mreže proširujemo tako da vrijedi za *svaku* linearnu vremenski nepromjenljivu mrežu u kojoj djeluje samo jedan nezavisni izvor, te je

$$H(s) = \frac{\mathscr{L}\,[\text{prisilni odziv}]}{\mathscr{L}\,[\text{poticaj}]} = \frac{R(s)}{E(s)} \tag{1}$$

gdje je sa $H(s)$ označena funkcija mreže a sa $R(s)$ odnosno $E(s)$ Laplaceovi transformati *prisilnog odziva* odnosno poticaja. Dakle, u mreži koju karakterizira $H(s)$ svi početni uvjeti jednaki su nuli i u mreži nema unutarnjih nezavisnih izvora.




Sl. 22.1 Mreža kao procesor signala.

Mrežu valja shvatiti kao procesor signala, slika 22.1 Ako se na ulaz narine poticaj $e(t)$, onda je odziv $r(t)$ u skladu s konvolucijskim integralom jednak

$$r(t) = \int_0^t h(t-x)e(x)dx \tag{2a}$$

odnosno u transformiranom području, u skladu s pravilom o transformaciji konvolucije, izraz (20.9), jednak

$$R(s) = H(s) \cdot E(s) \tag{2b}$$

Budući da je, prema (19.10), jedinični impuls derivacija funkcije jediničnog skoka, a za Laplaceovu transformaciju funkcije jediničnog skoka znamo da je u skladu sa (20.12) jednaka

$$\mathscr{L}\,[s(t)] = \frac{1}{s}$$

te koristeći pravilo deriviranja (20.2) dobivamo da je

$$\mathscr{L}\,[\delta(t)] = \mathscr{L}\left[\frac{ds}{dt}\right] = s \cdot \frac{1}{s} = 1 \tag{3}$$

No, impulsni odziv $h(t)$ jest prisilni odziv mreže na jedinični impuls te proizlazi da je

$$\mathscr{L}[h(t)] = H(s) \tag{4}$$

Laplaceov transformat impulsnog odziva $h(t)$ jednak je funkciji mreže.

### 22.2 VRSTE FUNKCIJA MREŽE

Prisilni odziv neke mreže na poticaj može biti ili napon između bilo koja dva čvora te mreže ili struja kroz bilo koju granu te mreže. Zbog toga razlikujemo:

a) *ulazne funkcije mreže,* kod kojih su poticaj i prisilni odziv definirani na *istom* prilazu mreže, i
b) *prijenosne funkcije mreže*, kod kojih su poticaj i prisilni odziv definirani na *različitim* prilazima mreže

Svi ovi pojmovi već su uvedeni u poglavlju 10.4 Ponovimo:

ad a) Ulazne funkcije mreže su ***impedancija*** $Z(s)$ i ***admitancija*** $Y(s)$ definirani kao

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{U(s)}{I(s)} \tag{5}$$

gdje su $U(s)$ i $I(s)$ Laplaceovi transformati napona i struje na istom prilazu. Često se obje funkcije mreže nazivaju jednim imenom: ***imitancija***.

ad b) Prijenosne funkcije mreže, za razliku od ulaznih, valja pisati s dvostrukim indeksima koji upućuju na to na koje se prilaze u promatranoj mreži odnose. Tako, primjerice, ako su u mreži identificirana dva prilaza, recimo prilaz 1 i prilaz 2, mogu se definirati četiri različite prijenosne funkcije mreže. To su:

**1)** ***prijenosna impedancija***

$$Z_{21}(s)=\frac{U_2(s)}{I_1(s)} \tag{6}$$

**2)** ***prijenosna admitancija***

$$Y_{21}(s)=\frac{I_2(s)}{U_1(s)} \tag{7}$$

**3)** ***prijenosni omjer napona***

$$A_{21}(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)} \tag{8}$$

**4)** ***prijenosni omjer struja***

$$\alpha_{21}(s)=\frac{I_2(s)}{I_1(s)} \tag{9}$$

Pri tome pretpostavljamo da samo na prilazu 1 djeluje poticaj, a da se samo na prilazu 2 određuje odziv!

## 22.3 FIZIKALNI SMISAO POLOVA I NULA FUNKCIJE MREŽE

Funkcija mreže $H(s)$ je *racionalna funkcija* (poglavlje 20.4) i prikazuje se kvocijentom dvaju polinoma $P(s)$ i $Q(s)$,

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+...+a_{m-1}s+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+...+b_{n-1}s+b_n} \tag{10}$$

gdje su koeficijenti *a* i *b realni i pozitivni* brojevi za mreže s *pasivnim* elementima.
Eventualni zajednički faktor, polinom $C(s)$, koji je mogao postojati u funkciji poticaja $E(s)=Q(s)C(s)$ kao i u funkciji odziva $R(s)=P(s)C(s)$ je pokraćen.

Budući da neki od korijena jednadžbe $P(s)=0$ mogu biti i višestruki, ova jednadžba ima *najviše m korijena* koji se nazivaju ***nulama funkcije mreže***. Analogno tome, jednadžba $Q(s)=0$ ima *najviše n korijena* koji se nazivaju ***polovima funkcije mreže.***

Funkcija mreže se zbog toga može napisati u faktoriziranom obliku

$$H(s)=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)...\ (s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...\ (s-p_n)} \tag{11}$$

gdje je $K=a_0\ /\ b_0$ neka konstanta, $z_1$, $z_2$,… $z_m$ su nule funkcije mreže a $p_1$, $p_2$,… $p_n$, su polovi funkcije mreže. Očigledno svaka funkcija mreže u potpunosti je određena konstantom $K$ te nulama i polovima.

Kako se određuje odziv $r(t)$? Jedan je način izravno u vremenskom području koristeći konvolucijski integral. Drugi je način da se odziv, u skladu s izrazom (2b), prvo odredi u frekvencijskom području.

Normalno je funkcija poticaja $e(t)$ zadana a time znamo i $E(s)$. Iz poznate strukture mreže lako se odredi funkcija mreže $H(s)$. Ako se umnožak $H(s)E(s)$ rastavi na parcijalne razlomke, u nazivniku svakog parcijalnog razlomka nalazi se po jedan pol bilo da pripada funkciji mreže $H(s)$ bilo da pripada funkciji poticaja $E(s)$. Zamislimo li, jednostavnosti radi, da su korijeni nazivnika racionalne funkcije $R(s)=H(s)E(s)$ jednostruki, što ne umanjuje bitno općenitost razmatranja, to će biti

$$H(s)E(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}+\sum_{j=1}^{v}\frac{K_j}{s-p_j} \tag{12}$$

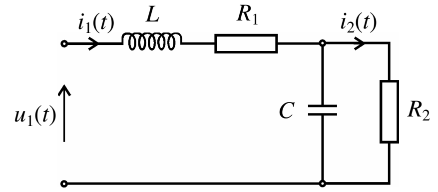
gdje je $n$ – broj polova funkcije mreže $H(s)$ a $v$ – broj polova funkcije poticaja $E(s)$. Nakon vraćanja u vremensko područje dobivamo da je odziv oblika

$$r(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[H(s)E(s)\right]=\sum_{i=1}^{n}K_i\cdot e^{p_it}+\sum_{j=1}^{v}K_j\cdot e^{p_jt} \tag{13}$$

*Zaključujemo:*

a) *Polovi definiraju valni oblik odziva.*
b) Odziv se sastoji od dviju komponenata i to od valnog oblika istih frekvencija kao što su u poticaju $p_j$ i to su tzv. ***prisilne frekvencije***, i od valnog oblika u kojem se nalaze frekvencije $p_i$ koje ovise samo o funkciji mreže i zovu se ***prirodne frekvencije varijable mreže r(t)***.
c) *Nule definiraju iznose (veličine) svakog dijela odziva,* budući da o njima ovise reziduumi polova $K_i$ i $K_j$.

*VAŽNO:* U zadanoj mreži prirodne frekvencije različitih varijabli mreže mogu, ali i ne moraju biti međusobno jednake. Dodatno, za istu varijablu mreže prirodne se frekvencije mogu razlikovati ovisno o vrsti poticaja.




Sl. 22.2 Prirodne frekvencije varijable $i_2(t)$ ovise o tome djeluje li na prilazu 1 poticaj u obliku naponskog ili strujnog izvora.

Tako su primjerice u mreži sheme spoja prema sl.22.2 prirodne frekvencije varijable $i_2(t)$ korijeni karakteristične jednadžbe

$$s^2+\left(\frac{R_1}{L}+\frac{1}{R_2C}\right)s+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{LC}=0$$

ako je poticaj naponski izvor $u_1(t)$, što proizlazi iz funkcije mreže $Y_{21}(s)=I_2(s)\ /\ U_1(s)$. Ako je poticaj strujni izvor, pripadna funkcija mreže je $\alpha_{21}(s)=I_2(s)\ /\ I_1(s)$ a pripadna prirodna frekvencija varijable $i_2(t)$ jest korijen jednadžbe

$$s+\frac{1}{R_2C}=0$$

Prirodne frekvencije varijable mreže vezane su uz slobodni odziv mreže. S toga se definira da je neki broj $s_1$ *prirodna frekvencija varijable mreže* $x(t)$ ako za neko početno stanje mreže slobodni odziv varijable $x(t)$ sadržava član $K_1e^{s_1t}$.

Sve prirodne frekvencije varijabli mreže pripadaju skupu *prirodnih frekvencija mreže.* Proizlazi zaključak:

Polovi funkcije mreže $H(s)$ podskup su frekvencija iz skupa prirodnih frekvencija mreže.

## 22.4 SVOJSTVA ULAZNIH FUNKCIJA MREŽE

Odredit ćemo osnovna svojstva ulaznih funkcija mreže uz pretpostavku da su sve mreže sastavljene od *pasivnih elemenata*, što znači da u mrežama *nema zavisnih izvora.*

a) *Koeficijenti polinoma $P(s)$ i $Q(s)$ moraju biti realni i pozitivni brojevi.*

Svi parametri linearne vremenski nepromjenljive mreže sastavljene od pasivnih elemenata su pozitivni brojevi ($R > 0$, $L > 0$, $C > 0$) pa je ovo svojstvo očigledno.

b) *Polovi i nule, ako su kompleksni, moraju biti konjugirano kompleksni brojevi.*

U protivnom bi neki od koeficijenata polinoma $P(s)$ i/ili $Q(s)$ morali bi biti kompleksni brojevi. Neka je primjerice

$$Q(s)=(s+a+jb)(s+a-jb)=s^2+2as+(a^2+b^2)$$

i koeficijenti polinoma $Q(s)$ su realni i pozitivni , ako su $a$ i $b$ realni i ako je $a > 0$. Bilo koja druga kombinacija, recimo

$$Q(s)=(s+a+jb)(s+c-jd) \quad ; \quad a\neq c \quad ; \quad b\neq d$$

ne daje realne koeficijente i s toga nije moguća!

c) *Realni dio svih polova i nula mora biti negativan ili nula:* $\sigma_k \le 0$

Sve mreže sastavljene od pasivnih elemenata su *stabilne*, tj. odziv zbog konačne akumulirane energije (slobodni odziv) ostaje konačan. Ovo je moguće samo ako je realni dio prirodnih frekvencija $s_k=\sigma_k+j\omega_k$ *nepozitivan.*

Znači da se *polovi* moraju nalaziti u *lijevoj polovici s – ravnine*, tj. ravnine kompleksnih frekvencija. No, isti uvjet *mora vrijediti* i za *nule* budući da je recipročna funkcija neke ulazne funkcije mreže također ulazna funkcija mreže. Impedancija je recipročna admitanciji i očigledno je da stabilnost odziva za mreže s pasivnim elementima ne smije ovisiti o tome je li na nekom prilazu poticaj napon ili struja.

d) *Pol ili nula moraju biti jednostruki ako je njihov realni dio jednak nuli :* $\sigma_k = 0$

Višestruki polovi uzrokuju da se u vremenskom području pojavljuju članovi oblika $t^{n-1}$ gdje je $n$ – red pola te se dobiva neograničeni odziv. Tako bismo, primjerice, za dvostruki pol na $j\omega$ osi dobili

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$$

Višestruki polovi su dopušteni na drugim mjestima ravnine kompleksnih frekvencija budući da se tada u vremenskom području pojavljuju članovi $t^{m}e^{-\delta t}$ za koje je

$$\lim_{t\to\infty} t^m e^{-\delta t}=0$$

za konačni $m$!

e) *U polinomima $P(s)$ i $Q(s)$ moraju postojati svi članovi od najvišeg do najnižeg stupnja osim ako ne nedostaju ili svi parni ili svi neparni članovi polinoma.*

Budući da su svi parametri elemenata mreže pozitivni i koeficijenti polinoma su pozitivni i nema načina kako da se uvedu negativni koeficijenti tako da bi se eventualno neki članovi polinoma poništili. Zbog toga moraju postojati svi članovi polinoma. Izuzeci od tog pravila su dva slučaja

- ako su svi članovi polinoma oblika ($s^2+a$) i tada očigledno nedostaju svi neparni članovi,
- ako polinom ima jednostruki pol u ishodištu a preostali članovi su oblika ($s^2+a$) i tada se svi članovi polinoma oblika ($s^2+a$) množe sa $s$, tako da u polinomu nedostaju svi parni članovi.

f) *Stupanj polinoma $P(s)$ i $Q(s)$ je jednak ili se razlikuje za jedan stupanj.*

Analizirajmo ponašanje ulazne funkcije mreže na *vrlo visokim frekvencijama*. Tako će primjerice kod analize impedancije dominirati nad svim ostalim elementima impedancija induktiviteta $sL$ a kod analize admitancije dominirat će admitancija kapaciteta $sC$ osim ako nisu kratko spojeni drugim elementima. Ako u jednoprilazu nema induktiviteta tada će pri vrlo visokim frekvencijama dominirati otpor ili će se nadomjesna mreža ponašati kao kratki spoj, uzmemo li u obzir da je $Z_C(s)=1/sC$ odnosno $Y_L(s)=1/sL$.

U svakom slučaju na vrlo visokim frekvencijama jednoprilaz će se ponašati bilo kao nadomjesni induktivitet, otpor ili kapacitet. Ovo znači da svaki oblik polinoma nije moguć pri predočavanju ulaznih funkcija mreže. Proizlazi da je

$$\lim_{s\to\infty} H(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{a_0 s^m}{b_0 s^n}=\lim_{s\to\infty}\frac{a_0}{b_0}s^{m-n}$$

No, budući da funkcija $H(s)$ kad $s\to\infty$ smije biti samo oblika: neka konstanta pomnožena sa $s$, 1 ili $1/s$ , to proizlazi

$$|m-n|\le 1$$

g) *Najniži stupnjevi polinoma $P(s)$ i $Q(s)$ mogu se razlikovati najviše za jedan stupanj.*

Analogno prethodnom zaključivanju na *vrlo niskim frekvencijama*, dakle kad $s\to 0$ za funkciju mreže će vrijediti

$$H(s)\approx\frac{\dots a_{m-1}s+a_m}{\dots b_{n-1}s+b_n}$$

i ona se ponovo reducira na jedan od tri dopuštena oblika: neka konstanta pomnožena sa $s$, 1 ili $1/s$ što vodi na gornji zaključak.

*Primjer:* Odredite koja od zadanih funkcija mreže jest ulazna funkcija mreže

$$Z_1(s)=\frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+3} \quad ; \quad Z_2(s)=\frac{s-1}{s^2+2s+1}$$

$$Z_3(s)=\frac{3s+2}{s^4+4s^2} \quad ; \quad Z_4(s)=\frac{2s^2+2s+1}{s+2}$$

Opažamo da jedino funkcija $Z_4(s)$ zadovoljava sve postavljene zahtjeve i predstavlja ulaznu funkciju neke mreže.

## 22.5 SVOJSTVA PRIJENOSNIH FUNKCIJA MREŽE

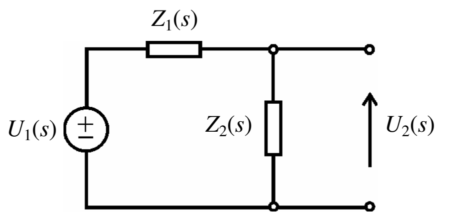
Pri analizi svojstva prijenosnih funkcija mreže valja uzeti u obzir da, za razliku od ulaznih funkcija mreže, *recipročne vrijednosti* funkcija mreže općenito *nisu funkcije mreže.*
S toga vrijedi:

a) *Koeficijenti polinoma $P(s)$ i $Q(s)$ moraju biti realni, a za polinom $Q(s)$* i pozitivni brojevi.
b) *Polovi i nule, ako su kompleksni, moraju biti konjugirano kompleksni brojevi.*
c) *Realni dio svih polova mora biti negativan ili nula: $\sigma_k \le 0$.*
d) *Pol mora biti jednostruk ako je njegov realni dio jednak nuli: $\sigma_k = 0$.*
e) *U polinomu $Q(s)$ moraju postojati svi članovi od najnižeg do najvišeg stupnja, osim ako ne nedostaju ili svi parni ili svi neparni članovi polinoma.*

f) *Za prijenosne funkcije mreže $A_{21}(s)$ i $\alpha_{21}(s)$ najviši mogući stupanj polinoma brojnika $P(s)$ jednak je stupnju polinoma nazivnika $Q(s)$.*

Pokažimo svojstvo f) na primjeru funkcije mreže $A_{21}(s)$. Pri vrlo visokim frekvencijama kako je to pokazano u prethodnom poglavlju dominiraju svojstva samo jedne vrste elemenata mreže. Isto to vrijedi i za dvoprilaze, slika 22.3. Vrijedi da je

$$A_{21} = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)+Z_2(s)}$$



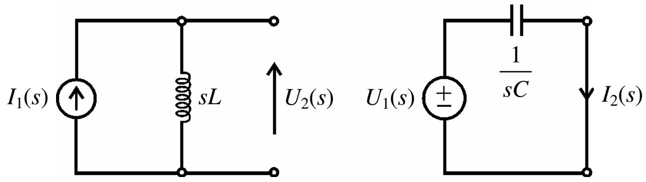

Sl. 22.3. Uz objašnjenje najvišeg mogućeg stupnja polinoma brojnika $P(s)$.

S obzirom na to da postoje tri elementa mreže, a po dva treba uzeti istodobno, lako je iscrpiti sve moguće kombinacije. Ako su oba elementa iste vrste, $A_{21}$ je konstanta. Ako su elementi različiti, sve kombinacije impedancija dvaju elemenata od tri moguća ($sL$, $1/sC$, $R$), a ima ih ukupno šest, pokazuju da stupanj polinoma brojnika $P(s)$ ne premašuje stupanj polinoma $Q(s)$.

g) *Za prijenosne funkcije mreže $Z_{21}(s)$ i $Y_{21}(s)$ najviši mogući stupanj polinoma brojnika $P(s)$ može premašiti za jedan stupanj polinoma nazivnika $Q(s)$.*

U analizi svih mogućih kombinacija koje daju najveću razliku između stupnjeva polinoma $P(s)$ i $Q(s)$ dolazimo do dvije granične sheme spoja, slika 22.4. U prvoj shemi spoja prijenosna je impedancija dana izrazom

$$Z_{21}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = sL$$




Sl. 22.4 Dvije granične sheme spoja.

a u drugoj shemi spoja prijenosna je admitancija dana izrazom

$$Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} = sC$$

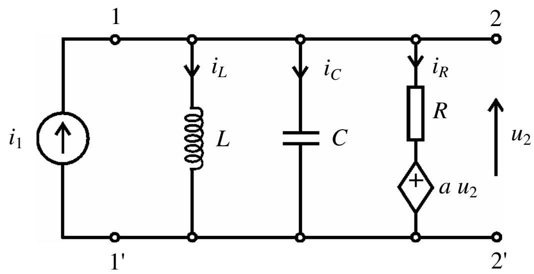
h) *Najmanji mogući stupanj polinoma $P(s)$ je nula, neovisno o stupnju polinoma $Q(s)$.*

Ovo je očigledno budući da koeficijenti polinoma $P(s)$ moraju biti samo realni, dakle mogu biti i negativni te se članovi istog stupnja mogu poništiti.

## 22.6 MREŽE SA ZAVISNIM IZVORIMA

Mreže sa zavisnim izvorima valja shvatiti kao *aktivne mreže* i osnovni uvjet koji vrijedi za linearne vremenski nepromjenljive mreže, da su mreže sastavljene od pasivnih elemenata stabilne, *ne mora* biti zadovoljen.

*Primjer:* Za mrežu sheme spoja prema slici 22.5 odredite prijenosnu impedanciju.




Sl. 22.5 Zadana shema spoja.

*Rješenje*:
U frekvencijskom području vrijedit će da je

$$I_1(s) = I_L(s) + I_C(s) + I_R(s)$$

$$sLI_L(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) = RI_R(s) + aU_2(s) = U_2(s)$$

odakle se za prijenosnu impedanciju dobiva izraz

$$Z_{21}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{C}\frac{s}{s^2 + [(1-a)/RC]s + 1/LC}$$

Iz analize polinoma Q(s) proizlazi da su polovi prijenosne impedancije korijeni jednadžbe

$$s^2 + \frac{1-a}{RC}s + \frac{1}{LC} = (s-p_1)(s-p_2) = 0$$

odnosno:

$$p_{1,2} = -\frac{1-a}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1-a}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Proizlazi da je neovisno o vrijednosti diskriminante gornje kvadratne jednadžbe promatrana mreža nestabilna ako vrijedi da je $a > 1$.