

XXIII. PREDAVANJE

Stabilnost kao posljedica pasivnosti mreže. Aktivne linearne vremenski nepromjenljive mreže: mreže sa zavisnim izvorima, mreže s povratnom vezom. Ograničenost odziva kao uvjet stabilnosti. Stabilnost impulsnog odziva. Stabilnost slobodnog odziva. Uvjet asimptotske stabilnosti. Stabilnost prisilnog odziva. Polovi funkcije mreže unutar lijeve poluravnine ravnine kompleksnih frekvencija. Nužni i dovoljni uvjeti opstojnosti Hurwitzovog polinoma. Globalna i lokalna stabilnost. Definicija lokalne stabilnosti. Analiza nelinearnih mreža u okolišu ustaljenog stanja. Ljapunovljeva metoda: analiza lineariziranih jednadžbi stanja.

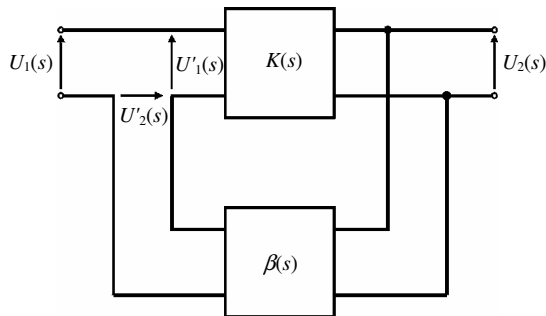
23. STABILNOST

23.1 STABILNE I NESTABILNE MREŽE

Pojam stabilnosti intuitivno je jasan. Smatramo da je neka mreža stabilna ako *ograničeni poticaj* proizvede u mreži *ograničeni odziv*. I bez "čvršće" definicije stabilnosti, očigledno je, iz elementarnih energetske razmatranja, da su *sve pasivne mreže*, dakle mreže karakterizirane R , L , M i C parametrima *stabilne*. U protivnom, to bi značilo da se unutar mreže, dakle mimo poticaja, u mrežu dodatno uvodi električna energija.

Postoje dvije vrlo važne vrste linearnih vremenski nepromjenljivih mreža u kojima ovaj uvjet *nije* zadovoljen. To su:

- mreže sa zavisnim izvorima*, u kojima je dodatno uvedena električna energija (napajanje) mimo poticaja nužan preduvjet da bi se dijelovi analizirane mreže mogli promatrati kao zavisni izvori, i
- mreže s povratnom vezom*, u kojima se dio električne energije preoblikovane na izlazu mreže ponovno uvodi u mrežu kao dio poticaja, slika 23.1.



Sl.23.1 Prikaz u frekvencijskom području jedne od mogućih varijanti mreža s povratnom vezom.

Neka su zadane funkcije mreže

$$K(s) = \frac{U_2(s)}{U_1'(s)} \quad ; \quad \beta(s) = \frac{U_2'(s)}{U_2(s)}$$

Ulazni signal (poticaj) $U_1(s)$ i izlazni signal (odziv) $U_2(s)$ povezani su funkcijom mreže

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{K(s)}{1 + \beta(s)K(s)}$$

Zaključujemo: ako su mreže karakterizirane funkcijama mreže $K(s)$ i $\beta(s)$ stabilne, to ne mora vrijediti za zajedničku mrežu, budući da njenu stabilnost / nestabilnost određuju korijeni jednadžbe

$$1 + \beta(s)K(s) = 0$$

Naravno da je moguće zamisliti i drukčiju situaciju. Recimo da je mreža karakterizirana funkcijom mreže $K(s)$ sama za sebe nestabilna. Potrebno je pronaći takvu mrežu karakteriziranu funkcijom mreže $\beta(s)$ da zajednička mreža postane stabilna!

Zaključujemo:

- Sve *pasivne* mreže su *stabilne*. Obrat tvrdnje ne vrijedi.
- Aktivne* mreže mogu biti *stabilne*, ali i *nestabilne*. Tipični su primjeri aktivnih linearnih vremenski nepromjenljivih mreža mreže sa zavisnim izvorima i mreže s povratnom vezom.

23.2 UVJETI STABILNOSTI

U nastavku analize razmatrat će se mreže kojima samo na jednom prilazu djeluje poticaj. Proširenje analize na više prilaza na kojima djeluje više poticaja je trivijalno budući da zbog linearnosti mreže vrijedi načelo superpozicije.

Neka je $r(t)$ odziv mreže na poticaj $e(t)$. Mreža je stabilna ako za zadanu konstantu $0 \leq E < \infty$ postoji neka druga konstanta $0 \leq R < \infty$ takva da

$$|e(t)| < E \Rightarrow |r(t)| < R \quad \text{za} \quad 0 \leq t < \infty \quad (1)$$

Ovime je ustvari preciznije rečeno da u stabilnoj mreži konačni (ograničeni) poticaj uzrokuje konačni (ograničeni) odziv.

S obzirom na tipove poticaja uobičajeno je da se definiraju tri vrste stabilnosti

- stabilnost impulsnog odziva*; poticaj $e(t) = \delta(t)$ je jedinični impuls,
- stabilnost slobodnog odziva*; poticaj $e(t)$ su naponi na kapacitetima $u_{Ck}(-0)$, $k=1,2,\dots$ i struje induktiviteta $i_{Lk}(-0)$, $k=1,2,\dots$, u početnom trenutku,
- stabilnost prisilnog odziva*; poticaj $e(t)$ je neka funkcija ograničena po iznosu.

23.2.1 Stabilnost impulsnog odziva

Očigledno je $r(t) = h(t)$ odnosno u frekvencijskom području $R(s) = H(s) \cdot 1$. Analiza stabilnosti se svodi na analizu funkcije mreže $H(s) = P(s) / Q(s)$. Budući da polovi definiraju valni oblik odziva, kako je to pokazano u prethodnom poglavlju, to će neka mreža biti stabilna na poticaj jediničnim impulsom ako su

- a) polovi pripadne funkcije $H(s)$, tj. korijeni polinoma $Q(s) = 0$, svi u lijevoj polovici s -ravnine (lijevoj poluravnini kompleksnih frekvencija). Nakon prestanka djelovanja poticaja odziv trne te vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0 \quad (2)$$

- b) Ako su polovi imaginarni $\sigma_k = 0$, oni su ujedno i konjugirani kako je to objašnjeno u odsječku 22.4. Tada oni moraju biti i *jednostruki*. Nakon prestanka djelovanja poticaja vrijedi da je

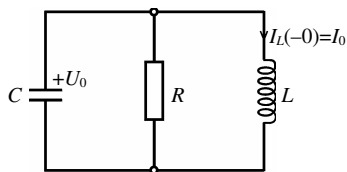
$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) < R < \infty \quad (3)$$

dakle odziv ostaje ograničen. Primjer su mreže u kojima *nema otpora*.

23.2.2 Stabilnost slobodnog odziva

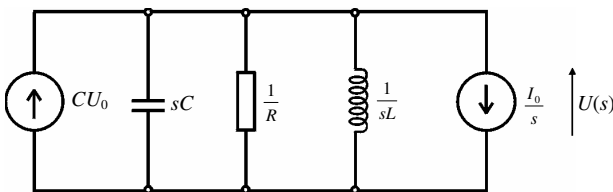
U ovom slučaju poticaj u mreži tvore početni naponi na kapacitetima i struje induktiviteta. S obzirom na različite grane mreže u kojima se nalaze kapaciteti i induktiviteti odziv će biti jednak zbroju pojedinačnih odziva, gdje je svaki pojedinačni odziv u frekvencijskom području dobiven množenjem napona "naponskog izvora" kapaciteta ili struje "strujnog izvora" induktiviteta s pripadnom funkcijom mreže.

Uvjeti stabilnosti dani u prethodnom odsječku *vrijede* i za stabilnost slobodnog odziva. Pri tome se uvjet (2) naziva *uvjet asimptotske stabilnosti*.



a)

↕



b)

- SI.23.2 a) Paralelni RLC -krug.
b) Nadomjesna shema spoja paralelnog RLC -kruga u frekvencijskom području.

Primjer:

U paralelnom RLC -krugu, slika 23.2, zadani su početni napon na kapacitetu $u_C(-0) = U_0$ i struja induktiviteta $i_L(-0) = I_0$. Parametri R, L i C su pozitivni. Je li ovaj krug asimptotski stabilan?

Rješenje:

Slobodni odziv dobiva se iz KZS-a,

$$\left(sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL}\right)U(s) = CU_0 - \frac{I_0}{s}$$

te se dobiva da je

$$U(s) = \frac{LCU_0s - LI_0}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1} = \frac{sU_0 - \frac{I_0}{C}}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

gdje je $2\alpha = \frac{1}{RC}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Polovi su korijeni jednadžbe

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

dakle

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

i u svakom se slučaju, zbog $\alpha > 0$, korijeni nalaze u lijevoj poluravnini kompleksnih frekvencija. Dakle, promatrani krug je asimptotski stabilan.

23.2.3 Stabilnost prisilnog odziva

U ovom slučaju poticaj je napon ili struja jednog nezavisnog izvora koji djeluje na jednom prilazu (ulazu) "mrtve" mreže. Poticaj, označimo ga sa $e(t)$, ograničen je po iznosu. Odziv je u vremenskom području dan konvolucijskim integralom (22.2a) a u frekvencijskom području umnoškom funkcije mreže $H(s)$ i Laplaceovog transformata poticaja $E(s)$, izraz (22.2b).

Kao i u prethodnim slučajevima polovi funkcije $R(s) = H(s)E(s)$ definiraju valni oblik odziva i određuju je li mreža stabilna na poticaj $e(t)$. U skladu sa (22.13) vidimo da stabilnost ovisi o položaju polova funkcije mreže $H(s)$, ali i o položaju polova funkcije $E(s)$. Za $H(s)$ smo već prije u odsječku 23.2.1 utvrdili uvjete stabilnosti, a sad dodatno lako zaključujemo da isti uvjeti moraju vrijediti i za polove funkcije $E(s)$ budući da je ona prema polaznoj pretpostavki ograničena, a time i stabilna.

Trajno djelujući poticaj uzrokovat će u stabilnoj mreži pojavu prijelaznog stanja nakon kojega nastupa ustaljeno stanje,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \text{ustaljeno stanje}$$

Ipak postoji jedan slučaj kad *ograničeni poticaj* u mreži s pasivnim elementima može proizvesti *neograničen odziv*. To je rezonancija u krugu bez gušenja. Pokažimo to na primjeru paralelnog LC kruga vlastite frekvencije

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

na koji je narinut ograničeni poticaj u obliku struje

$$i = \hat{I} \sin \omega_0 t$$

iz nezavisnog strujnog izvora. Impedancija paralelnog LC kruga je

$$Z_{LC}(s) = \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} = H(s)$$

Ova funkcija mreže ima dva pola na $j\omega$ osi, i to $s_1 = j\omega_0$ i $s_2 = -j\omega_0$. Prema (21.10), Laplaceov transformat struje je

$$I(s) = \frac{\omega_0 \hat{I}}{s^2 + \omega_0^2}$$

te je napon strujnog izvora, shvaćen kao odziv, dan u frekvencijskom području izrazom

$$U(s) = Z_{LC}(s)I(s) = \frac{\omega_0 \hat{I}}{C} \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

i opažamo da smo dobili dvostruki konjugirani pol na $j\omega$ -osi. Odziv je neograničen,

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \frac{\omega_0 \hat{I}}{2C} t \sin \omega_0 t$$

Zbog toga se pri navođenju *uvjeta stabilnosti prisilnog odziva* ograničavamo na zahtjev da polovi funkcije mreže budu *unutar lijeve poluravnine kompleksnih funkcija* i niti jedan ne smije biti na $j\omega$ -osi.

Stabilnost prisilnog odziva ponekad se naziva i **BIBO stabilnost** (BIBO-bounded input bounded output).

23.3 HURWITZOV TEST STABILNOSTI

(Hurwitz, 1895.)

Ako je zadana prikladna racionalna funkcija $H(s) = P(s) / Q(s)$ i ako se želi znati je li ona transformat impulsnog odziva neke stabilne mreže, nužno je *odrediti polove funkcije $H(s)$* , dakle korijene algebarske jednadžbe $Q(s) = 0$ i vidjeti jesu li realni dijelovi korijena negativni. Polinomi $Q(s)$ za koje to vrijedi nazivaju se **Hurwitzovi polinomi**. Hurwitz je pokazao da se može odrediti jesu li realni dijelovi korijena jednadžbe $Q(s) = 0$ negativni *bez faktoriziranja polinoma $Q(s)$* !

Što znamo o polinomu

$$Q(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n ; \quad b_0 > 0 \quad (4)$$

ako zahtijevamo da svi korijeni budu u lijevoj poluravnini ravnine kompleksnih frekvencija $s = \sigma + j\omega$ ili eventualno na $j\omega$ -osi, ali tada samo kao jednostruki korijeni?

U skladu s izloženim u prethodnom poglavlju znamo da su

- svi koeficijenti b_0, b_1, \dots, b_n pozitivni realni brojevi, i da

- moraju postojati *svi članovi* od najvišeg do najnižeg stupnja, osim ako ne nedostaju ili svi parni ili svi neparni članovi polinoma.

Da bi neki polinom bio Hurwitzov polinom ova su dva uvjeta *nužna, ali ne i dovoljna*.

Prema Hurwitzu, prvo treba stvoriti determinantu Δ_n od koeficijenata polinoma $Q(s)$ na način pokazan izrazom (5).

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 & b_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & b_{n-2} & b_n \end{vmatrix} \quad (5)$$

Tada je polinom $Q(s)$ Hurwitzov ako je

$$\Delta_i > 0 ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Pri tome se, primjerice, determinanta Δ_{n-1} dobiva iz determinante Δ_n tako da se izbrišu posljednji stupac i posljednji redak determinante Δ_n . Ovako dobivene determinante zovu se *Hurwitzove determinante*.

Primjer:

Ispitati je li polinom $Q(s) = s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 8s + 5$ Hurwitzov polinom?

Rješenje:

Proizlazi da je: $b_0=1, b_1=4, b_2=9, b_3=8, b_4=5, n=4$, te su Hurwitzove determinante

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 720 > 0 ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 1 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 144 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 28 > 0 ; \quad \Delta_1 = 4 > 0$$

Budući da su svi $\Delta_i > 0$, ($i = 1, 2, 3, 4$), to je zadani polinom Hurwitzov polinom.

Napomena: Hurwitzov test stabilnosti vrlo je jednostavan, ali pretpostavlja da je *poznat* transformat impulsnog odziva $H(s)$. Ovo često nije slučaj. Znatno je češće poznata amplitudna ili fazna karakteristika funkcije $H(j\omega)$ i to, ili samo približno, ili na osnovi mjerenja. Tada se koriste drugi testovi, recimo *Nyquistov test stabilnosti*, koji je bliži tehničkim primjenama.

23.4 STABILNOST RADNE TOČKE NELINEARNIH KRUGOVA

(M.A. Ljapunov, 1892.)

Iskaz da ograničeni poticaj uzrokuje ograničeni odziv u nekoj mreži, iskazan relacijama (1), često se naziva i iskaz o **globalnoj stabilnosti** te mreže.

Moguć je i drugi pristup koji vodi na pojam tzv. **lokalne stabilnosti**. Odziv mreže $r(t)$ definirane u intervalu $[t, \infty)$ lokalno je stabilan ako za svaki $\varepsilon > 0$, postoji neki $\delta > 0$ takav da svaki odziv $\bar{r}(t)$ za koji vrijedi da je

$$|r(t_0) - \bar{r}(t_0)| < \delta$$

zadovoljava uvjet

$$|r(t) - \bar{r}(t)| < \varepsilon$$

za svaki $t > t_0$. Ako to ne vrijedi, odziv mreže $r(t)$ je **lokalno nestabilan**. Kvalitativno ovo znači da za **bliske početne uvjete** u lokalno stabilnoj mreži **odzvivi ostaju bliski**.

Sve što je prije rečeno za linearne mreže vrijedi i sada. Jer ako je neka mreža globalno nestabilna, onda za $t \rightarrow \infty$ i $r(t) \rightarrow \infty$, a to znači da ma kako bliske početne uvjete uzeli, za dva nestabilna odziva oni će divergirati i za neki $t > t'$ bit će sigurno $|r(t) - \bar{r}(t)| > \varepsilon$.

Ovako uveden pojam stabilnosti omogućuje nam **analizu nelinearnih mreža** u okolišu ustaljenih stanja.

Pretpostavimo da se neka nelinearna mreža opisana diferencijalnom jednačnjom

$$\frac{dr}{dt} = f(r)$$

nalazi u ustaljenom stanju. Vrijednost varijable odziva $r(t)$ u ustaljenom stanju očigledno je određena uvjetom

$$\frac{dr}{dt} = f(r) = 0$$

Označimo tu vrijednost sa r_0 . Dakle, $f(r_0) = 0$. U trenutku $t = t_0$ zamislimo da se vrijednost varijable $r(t_0) = r_0$ promijenila za neku malenu vrijednost p_0 , tj. da je

$$r(t_0) + p_0 = \bar{r}(t_0)$$

U mreži dolazi do promjene stanja opisanog jednačnjom

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = f(\bar{r})$$

gdje je nova varijabla odziva

$$\bar{r}(t) = r(t_0) + p(t)$$

odnosno

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dp}{dt} = f(r_0 + p) = f(r_0) + pf'(r_0) + \dots$$

Zadržimo li u razvoju funkcije $f(p)$ u Taylorov red samo prva dva člana, to dobivamo diferencijalnu jednačnju

$$\frac{dp}{dt} \approx pf'(r_0) \rightarrow p(t) \approx p_0 e^{f'(r_0)t}$$

odakle očigledno proizlazi zaključak da ako je

$$f'(r_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{mreža je lokalno stabilna,} \\ > 0 & \text{mreža je lokalno nestabilna.} \end{cases}$$

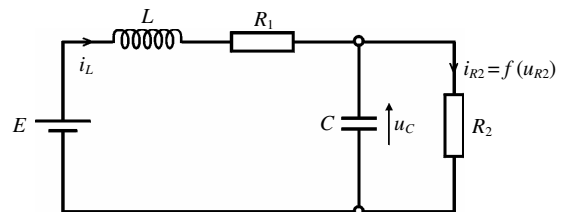
Napomene: a) Vidimo da u osnovi izložene metode leži analiza lineariziranih diferencijalnih jednačnji mreže. Linearizacija se provodi u okolišu radne točke (ustaljenog stanja). Radna točka se naziva ponekad i ravnotežna točka, posebno u mehanici. Ova se metoda često naziva i **Ljapunovljeva metoda analize stabilnosti**.

b) Ako je ustaljeno stanje periodičko, ali potaknuto periodičkim poticajem, postupak ostaje isti, ali su metode analize stabilnosti bitno složenije. Analiza stabilnosti vodi na analizu rješenja diferencijalne jednačnje s periodički promjenljivim koeficijentima, tzv. Mathieuovu ili Hillovu diferencijalnu jednačnju.

c) Lokalna nestabilnost uz globalnu stabilnost osnovna je značajka mreža s kaotičnim ponašanjem.

Primjer :

Za mrežu sheme spoja prema slici 23.3 odredite pod kojim je uvjetima zajamčena stabilnost radne točke ako je otpor R_2 nelinearan karakteristike $i_{R2} = f(u_{R2})$. Ostali elementi mreže su linearni.



Sl. 23.3 Zadana shema spoja nelinearnog kruga.

Rješenje :

Jednačnje stanja mreže su

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= \frac{1}{C}(i_L - i_{R2}) \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{R_1}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C + \frac{E}{L} \end{aligned} \quad (6)$$

Mreža je u ustaljenom stanju (ravnotežnoj točki) kad je

$$\frac{du_C}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{di_L}{dt} = 0$$

te iz jednačnji stanja (6) proizlaze "koordinate" ravnotežne točke (ustaljenog stanja)

$$i_{L0} = \frac{E - u_{C0}}{R_1} ; \quad i_{L0} = f(u_{C0}) \quad (7)$$

Pretpostavimo da je mreža izvedena iz ustaljenog stanja. Uvedimo nove varijable

$$u_C = u_{C0} + x ; \quad i_L = i_{L0} + y \quad (8)$$

pri čemu su x i y varijacije varijabli u_C i i_L u okolišu (u_{C0}, i_{L0}) . Funkciju $i_{R2} = f(u_{R2})$ rastavimo u Taylorov red. Budući da je $u_{R2} = u_C$, to možemo pisati

$$i_{R2} = f(u_C) = f(u_{C0} + x) = f(u_{C0}) + xf'(u_{C0}) + \frac{x^2}{2!} f''(u_{C0}) + \dots$$

a prema Ljapunovu uzimamo u obzir samo prva dva člana reda, tj.

$$f(u_C) \approx f(u_{C0}) + xf'(u_{C0})$$

Budući da je

$$f'(u_C) = \frac{df(u_C)}{du_C} = \frac{di_{R2}}{du_{R2}}$$

to je $f'(u_{C0})$ jednak recipročnoj vrijednosti dinamičkog otpora R_{2d} u ravnotežnoj (radnoj) točki, tj.

$$f'(u_{C0}) = \frac{1}{R_{2d}} \cong 0 ; \quad f(u_C) \approx f(u_{C0}) + \frac{x}{R_{2d}} \quad (9)$$

S obzirom na to da funkcija $f(u_{R2})$ nije prethodno specificirana moguć je bilo koji predznak dinamičkog otpora R_{2d} .

Uvrste li se izrazi (8) i (9) u jednadžbe stanja (6) te uzevši u obzir uvjete (7) proizlazi sustav lineariziranih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{R_{2d}C}x + \frac{1}{C}y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{C}x - \frac{R_1}{L}y$$

Ukloni li se jedna od varijabli, recimo y , dobivamo diferencijalnu jednadžbu po varijaciji x ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_{2d}C}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_1}{R_{2d}}\right)x = 0 \quad (10)$$

Ovime se analiza stabilnosti radne točke zadanog nelinearnog kruga svela na analizu stabilnosti linearnog sustava zadanog diferencijalnom jednadžbom (10), dakle na ispitavanje je li polinom

$$Q(s) = b_0s^2 + b_1s + b_2$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_{2d}C}, \quad b_2 = \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_1}{R_{2d}}\right)$$

Hurwitzov polinom ili nije.

U skladu s izrazom (5) proizlazi da je

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} = b_1b_2 ; \quad \Delta_1 = |b_1| = b_1$$

Radna je točka stabilna ako je

$$b_1 = \frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_{2d}C} > 0 ; \quad b_2 = \frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R_1}{R_{2d}}\right) > 0$$

Do nestabilnosti može doći samo ako je dinamički otpor negativan, $R_{2d} = -|R_{2d}|$.

Napomena: Budući da Ljapunovljeva metoda vrijedi samo za ispitivanje stabilnosti i ograničena je na male varijacije oko točke ravnoteže, to se ovom metodom ne mogu izračunati apsolutne vrijednosti varijabli stanja.