XXIV. PREDAVANJE

Simetrična/nesimetrična višefazna mreža. Pojam uravnotežene višefazne mreže. Pojam faze. Vezanost pojma faze uz stvarne mreže. Zvjezdište. Fazni napon prema zvjezdištu. Pojam nulišta. Temeljno svojstvo nulišta. Fazni napon prema nulištu. Osnovna svojstva simetričnih mreža: jednakost potencijala nulišta i zvjezdišta, uravnoteženost. Primjer dvofazne nesimetrične uravnotežene mreže. Pojam međufaznog (linijskog) napona. Veze između trenutnih i efektivnih vrijednosti faznog i linijskog napona. Određivanje nulišta geometrijskom konstrukcijom. Nulište je u težištu trokuta linijskih napona u slučaju trofazne trožilne mreže.

VII. VIŠEFAZNE MREŽE

24. OPĆA SVOJSTVA VIŠEFAZNIH MREŽA

24.1 OSNOVNI POJMOVI

• ***Višefazna (m-fazna) mreža****.* *Izmjenična* mreža koja se sastoji od m izmjeničnih, na promatranom harmonijskom članu *međusobno fazno pomaknutih,* izvora i grupa trošila koji su međusobno povezani sa m+1 - ili sa m-vodiča (žila).

U skladu s tim razlikujemo *m-fazne m-žilne* mreže od *m-faznih m+1-žilnih* mreža.

• ***Simetrična višefazna (m-fazna) mreža****.* Mreža koja posjeduje svojstvo simetrije s obzirom na *način djelovanja poticaja* i *geometrijsku strukturu* (graf) te *jednakost* elemenata mreže i njihovog spoja u *svakoj fazi trošila.* U protivnom, mreža je ***nesimetrična****.*

Simetrični način djelovanja poticaja znači da u mreži djeluje ili m naponskih izvora $e_k(t)$ jednake amplitude $\hat{E}(n)$ na n-tom harmonijskom članu, ili m strujnih izvora $i_k(t)$ jednake amplitude $\hat{I}(n)$ na n-tom harmonijskom članu, a fazni pomak između *dva uzastopna* izvora na n-tom harmonijskom članu iznosi

$$\varphi_n = 2\pi \frac{n}{m} \tag{1}$$

Proizlazi da je

$$e_k(t) = \sum_{n=1}^{n_0} \hat{E}(n)\cos(n\omega t + \alpha_{k,n}) \quad ; \quad k = 1,2,...,m \tag{2a}$$

gdje je n_0-broj relevantnih harmonijskih članova u poticaju, a $\alpha_{k,n}$ je početna faza dana izrazom

$$\alpha_{k,n} = \alpha_n - (k-1)2\pi \frac{n}{m} = \alpha_n - (k-1)\varphi_n \tag{2b}$$

pri čemu je α_n fazni kut u odnosu prema nekoj unaprijed odabranoj referenciji.

Na analogan način definiraju se i mreže u kojima djeluju m-fazni simetrični strujni izvori. U elektroenergetskim mrežama, u kojima se višefazne mreže najviše koriste, isključivo se upotrebljavaju naponski izvori tako da u nastavku analize nećemo razmatrati višefazne mreže u kojima djeluju strujni izvori.

Očigledno mora vrijediti da je

$$\varphi_n \neq 2\pi N \quad ,\text{tj. } n \neq Nm \quad , \; N = 1,2,... \tag{3}$$

U protivnom, ako je n=Nm, bit će

$$\begin{aligned} &\hat{E}(Nm)\cos\left[Nm\omega t + \alpha_{Nm} - (k-1)2\pi N\right] = \\ &= \hat{E}(Nm)\cos\left[Nm\omega t + \alpha_{Nm}\right] \quad , \; \forall k \end{aligned}$$

i promatrana mreža na Nm-tom harmonijskom članu nije višefazna nego jednofazna!

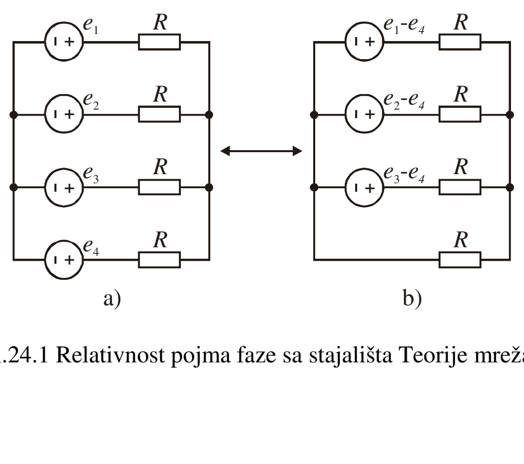
• ***Uravnotežena višefazna (m-fazna) mreža****.* *Jednoharmonijska* višefazna mreža čija je trenutna snaga u ustaljenom stanju *konstantna,* tj. vrijedi da je

$$\sum_{k=1}^{m} e_k(t) i_k(t) = \text{konst.} \tag{4}$$

gdje je $i_k(t)$ trenutna vrijednost struje k-tog naponskog izvora. U protivnom, mreža je ***neuravnotežena****.*

• ***Faza****.* Jedan od m strukturno identičnih dijelova mreže u koji se promatrana simetrična mreža može rastaviti. Kod nesimetričnih mreža pojam faze koristi se samo kao oznaka broja poticaja iste periode, djelujućih na trošilo.

Važno je uočiti da je pojam faze vezan uz *stvarne mreže, ne modele*! Sa stajališta Teorije mreža simetrična četverofazna mreža sheme spoja prema slici 24.1a valnih



a) b)

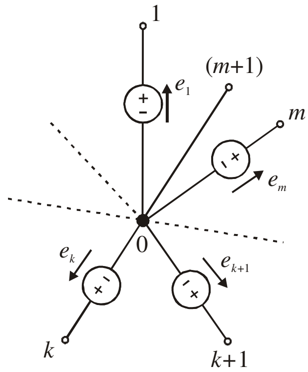
Sl.24.1 Relativnost pojma faze sa stajališta Teorije mreža.

oblika napona

$$e_1 = -e_3 = \hat{E}\sin\omega t$$
$$-e_2 = e_4 = \hat{E}\cos\omega t$$

identična je nesimetričnoj trofaznoj mreži sheme spoja prema slici 24.1b budući da ih opisuju iste jednadžbe mreže!

• ***Spojevi izvora i trošila***. Izvori i trošila spajaju se ili u ***m-terokut*** ili u ***m-kraku zvijezdu***.



Sl.24.2 Primjer m-krake zvijezde naponskih izvora. Zvjezdište može (m+1-vi priključak), ali i ne mora biti dostupno.

Zajednička točka svih izvora naziva se ***zvjezdište***. Napon između k-tog priključka izvora i zvjezdišta $e_k(t)$ naziva se ***fazni napon k-te faze***. Pri tome je bitna pretpostavka da je zvjezdište *dostupno*. Ako zvjezdište nije dostupno ili je izvor spojen u m-terokut fazni se napon definira uz pomoć pojma *neutrala* odnosno *nulišta.*

24.2 POJAM NULIŠTA (NEUTRALA)

Slika 24.3 prikazuje shemu spoja naponskih izvora m-fazne m-žilne mreže. Pretpostavljamo da su izvori spojeni u m-kraku zvijezdu.

Nulište (neutral) dobivamo tako da višefaznu mrežu opteretimo m-krakom zvijezdom jednakih otpora R, a u jednoharmonijskoj mreži m-krakom zvijezdom elemenata mreže jednakih impedancija u svakoj fazi.

Ovako dobiveno zvjezdište naziva se *nulište (neutral)* razmatrane m-fazne m-žilne mreže.

U nulištu vrijedi *KZS,* dakle je

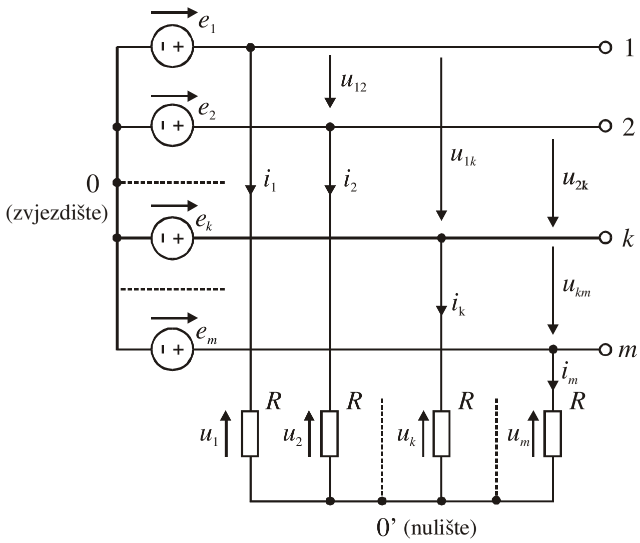
$$\sum_{k=1}^{m} i_k = 0$$

No, jer je $u_k = Ri_k$, to vrijedi da je

$$R\sum_{k=1}^{m} i_k = 0$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = 0 \qquad (5)$$



Sl.24.3 Uz objašnjenje pojma nulišta (neutrala).

što je *temeljno svojstvo nulišta.* Naponi $u_k(t)$ nazivaju se ***faznim naponima*** m-fazne m-žilne mreže.

Između nulišta i zvjezdišta postoji napon $u_{00'}$, koji lako odredimo koristeći *KZN.*

Za svaku k-tu fazu vrijedi da je

$$u_{00'} + u_k = e_k \qquad (6)$$

Zbrojimo li ove izraze za svih m-faza, dobivamo da je

$$mu_{00'} + \sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{k=1}^{m} e_k$$

No, drugi član je prema (5) jednak nuli, te dobivamo da je

$$u_{00'} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} e_k \qquad (7)$$

Nakon kvadriranja jednadžbe (6) i zbrajanja po svim fazama dobivamo izraz za efektivnu vrijednost napona između nulišta i zvjezdišta

$$U_{00'} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(E_k^2 - U_k^2)} \qquad (8)$$

gdje su sa E_k odnosno U_k označene efektivne vrijednosti faznog napona k-te faze prema zvjezdištu odnosno prema nulištu.

24.3 OSNOVNA SVOJSTVA SIMETRIČNIH VIŠEFAZNIH MREŽA

24.3.1 Jednakost potencijala nulišta i zvjezdišta

Jednakost potencijala nulišta i zvjezdišta znači da je $u_{00'}$=0, odnosno da u svakoj simetričnoj višefaznoj mreži vrijedi da je

$$\sum_{k=1}^{m} e_k = 0 \tag{9}$$

Napišimo izraz za fazni napon e_k, (2a), u malo drukčijem obliku, tj.

$$e_k = \sum_{n=1}^{n_0} \hat{E}(n)\cos\left[n\omega t + \alpha_n - (k-1)\frac{2\pi}{m}n\right] = \\ = \sum_{n=1}^{n_0} \hat{E}(n)\cos n\left[x - (k-1)\frac{2\pi}{m}\right]$$

gdje je

$$x = \omega t + \frac{\alpha_n}{n}$$

Vrijedi da je

$$\sum_{k=1}^{m} e_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{n_0} \hat{E}(n)\Re e\left\{e^{jnx}e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{m}n}\right\} = \\ = \sum_{n=1}^{n_0} \hat{E}(n)\sum_{k=1}^{m}\Re e\left\{e^{jnx}e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{m}n}\right\}$$

i cijeli se problem svodi na to da se odredi suma

$$\sum_{k=1}^{m} e^{-j(k-1)\frac{2\pi}{m}n} = S = e^{j\frac{2\pi}{m}n}\cdot\sum_{k=1}^{m} e^{-jk\frac{2\pi}{m}n} \tag{10}$$

No, očigledno je i

$$\sum_{k=1}^{m} e^{-jk\frac{2\pi}{m}n} = S$$

budući da je svejedno kojim se redom zbraja m zadanih kompleksnih brojeva. Proizlazi da je

$$S = e^{j\frac{2\pi}{m}n} S \tag{11}$$

a kako je za $n \neq Nm$, N=1, 2, … i $e^{j2\pi n/m} \neq 1$, to je jednadžbu (11) moguće zadovoljiti samo ako je S=0.

Dakle, vrijedi izraz (9), odnosno napisan u drukčijem obliku za n-ti harmonijski član.

$$\sum_{k=1}^{m} \hat{E}(n)\cos n\left[x - (k-1)\frac{2\pi}{m}\right] = \\ = \begin{cases} 0 & n \neq Nm \\ m\hat{E}(n)\cos nx & n = Nm \end{cases} \tag{12}$$

24.3.2 Uravnoteženost

Simetrični poticaji u jednoharmonijskoj mreži, dakle mreži linearnoj i vremenski nepromjenljivoj, uzrokuju simetrične odzive. Zbog toga ako je napon k-te faze

$$e_k = \hat{E}\cos\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{m}\right]$$

onda će struja te faze biti dana izrazom

$$i_k = \hat{I}\cos\left[\omega t - \psi - (k-1)\frac{2\pi}{m}\right]$$

dok za trenutnu snagu dobivamo da je

$$p_k = e_k i_k = \hat{E}\hat{I}\cos\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{m}\right]\cos\left[\omega t - (k-1)\frac{2\pi}{m} - \psi\right] = \\ = \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\cos\psi + \frac{1}{2}\hat{E}\hat{I}\cos\left[2\omega t - 2(k-1)\frac{2\pi}{m} - \psi\right]$$

No, u skladu sa (12) bit će za $m > 2$

$$\sum_{k=1}^{m}\cos\left[2\omega t - 2(k-1)\frac{2\pi}{m} - \psi\right] = 0$$

te je trenutna snaga

$$p(t) = \sum_{k=1}^{m} e_k i_k = \frac{m}{2}\hat{E}\hat{I}\cos\psi = \text{konst.} \tag{13}$$

Proizlazi da trenutna snaga simetrične višefazne mreže ne ovisi o vremenu i jednaka je *zbroju srednjih snaga pojedinih faza.*

Svaka simetrična mreža je uravnotežena, ali postoje i uravnotežene nesimetrične mreže. Karakterističan primjer je ***dvofazna trožilna mreža*** u kojoj su naponi izvora dani izrazima

$$e_1 = \hat{E}\cos\omega t \ \ ; \ \ e_2 = \hat{E}\sin\omega t$$

Ako su struje faza zbog toga

$$i_1 = \hat{I}\cos(\omega t - \psi) \ \ ; \ \ i_2 = \hat{I}\sin(\omega t - \psi)$$

to je očigledno

$$e_1 i_1 + e_2 i_2 = \hat{E}\hat{I}[\cos\omega t\cos(\omega t - \psi) + \sin\omega t\sin(\omega t - \psi)] = \\ = \hat{E}\hat{I}\cos\psi$$

Dakle, razmatrana mreža je *uravnotežena.*

24.4 VEZE IZMEĐU FAZNIH I MEĐUFAZNIH NAPONA

Pod faznim naponom smatrat ćemo, osim ako se posebno ne naglasi drukčije, napon određene faze prema nulištu. Pod ***međufaznim (linijskim) naponom*** u_{kl} smatramo napon između faze k i faze l.

24.4.1 Trenutne vrijednosti

Fazni napon k-te faze u_k može se u skladu sa KZN izraziti na m načina, tj. da je

$$u_k = u_l + u_{lk} \quad ; \quad l = 1,2,...,m \tag{14}$$

što je očigledno i iz slike 24.3. Pri tome je naravno

$$u_{kl} = -u_{lk} \quad ; \quad u_{kk} = 0$$

Zbrojimo svih m jednadžbi oblika (14)

$$\sum_{l=1}^{m} u_k = \sum_{l=1}^{m} u_l + \sum_{l=1}^{m} u_{lk}$$

No, zbog (5) prvi je član na desnoj strani jednadžbe jednak nuli, te dobivamo da je

$$u_k = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} u_{lk} \tag{15}$$

Ako su naponi promatrane mreže jednoharmonijski, to vrijedi fazorska transformacija. Dakle:

$$\dot{U}_k = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} \dot{U}_{lk} \tag{16}$$

24.4.2 Efektivne vrijednosti

U izrazu (14) umjesto indeksa k i l upotrijebimo neke druge indekse, recimo q i s. Tada je

$$u_{sq} = u_q - u_s$$

odnosno

$$u_{sq}^2 = u_q^2 + u_s^2 - 2u_q u_s$$

Načinimo zbrojeve preko svih q = 1, 2, …, m, te s = 1, 2, …, m. Proizlazi

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_{sq}^2 = \sum_{q=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_q^2 + \sum_{q=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_s^2 - 2\sum_{q=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_q u_s$$

Budući da su indeksi q i s međusobno nezavisni, to je

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_q u_s = \sum_{q=1}^{m} u_q \sum_{s=1}^{m} u_s$$

no taj je umnožak jednak nuli, budući da je prema (5) svaki faktor jednak nuli.

S druge strane, očigledno je

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_{sq}^2 = \sum_{k=1}^{m} u_{kk}^2 + 2\sum_{1\le q<s\le m} u_{sq}^2$$

Prvi zbroj na desnoj strani jednak je nuli, jer je $u_{kk} \equiv 0$, a drugi zbroj se može napisati na prikazani način jer je $u_{sq}^2 = u_{qs}^2$ te se oba člana u_{sq}^2 i u_{qs}^2 mogu napisati odmah kao $2u_{sq}^2$, pri čemu je $q < s$ ili $s > q$!

Isto tako očigledno je

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_q^2 + \sum_{q=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} u_s^2 = 2m\sum_{k=1}^{m} u_k^2$$

što daje konačni izraz

$$m\sum_{k=1}^{m} u_k^2 = \sum_{1\le q<s\le m} u_{sq}^2$$

odnosno izraženo u efektivnim vrijednostima

$$m\sum_{k=1}^{m} U_k^2 = \sum_{1\le q<s\le m} U_{sq}^2 \tag{17}$$

Primjer: a) Odredite fazni napon faze 1 ako su poznati valni oblici linijskog napona trofazne nesimetrične mreže!
b) Odredite vezu između efektivnih vrijednosti faznih i linijskih napona četverofazne nesimetrične mreže!

Rješenje:
ad a) Prema (15) bit će

$$u_1 = \frac{1}{3}(\underbrace{u_{11}}_{0} + u_{21} + u_{31}) = \frac{1}{3}(u_{21} + u_{31})$$

ad b) Prema (17) bit će

$$4(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2) = U_{21}^2 + U_{31}^2 + U_{41}^2 + U_{32}^2 + U_{42}^2 + U_{43}^2$$

24.5 ODREĐIVANJE NULIŠTA GEOMETRIJSKOM KONSTRUKCIJOM

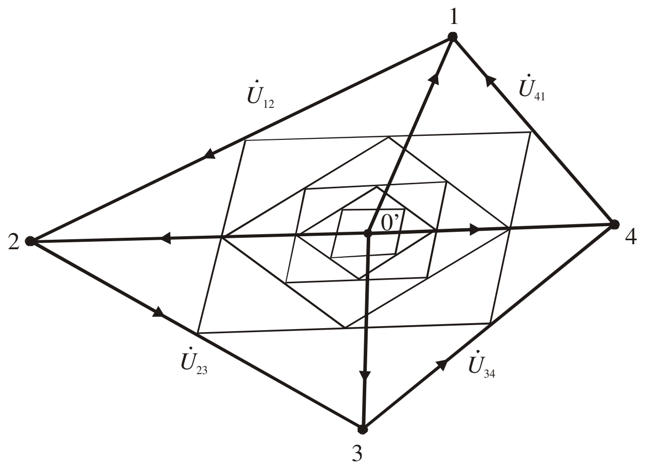
U nastavku ograničit ćemo se na razmatranje m-faznog m-žilnog *jednoharmonijskog* sustava napona. Ograničenjem na jednoharmonijski sustav ne smanjujemo općenitost razmatranja nego samo pojednostavljujemo notaciju koristeći fazorsku transformaciju. U protivnom bi cijelu analizu trebalo provesti za trenutne vrijednosti koristeći *vektorsku notaciju.*

24.5.1 *Opći postupak* (F. Buchholz, 1921.)

M-fazni *m*-žilni jednoharmonijski sustav napona u potpunosti je određen sa m fazora linijskih napona, tj. sa m točaka u ravnini. Slika 24.4 prikazuje opći slučaj za četverofazni četverožilni jednoharmonijski sustav napona.

U općem slučaju nulište se određuje ovako:

a) Zadanom m-terokutu *raspolovi* se svaka stranica.
b) Dobivena polovišta tvore novi m-terokut, stranice kojeg se *ponovno raspolove.*
c) Ovaj se postupak ponavlja tako dugo dok se m-terokut ne stegne u točku.
d) Ova točka jest *nulište* zadanog sustava.



Sl.24.4 Postupak određivanja nulišta geometrijskom konstrukcijom.

24.5.2 Trofazni sustav

Za trofazni sustav vrijedi ovo važno pojednostavljenje:

Nulište se nalazi u težištu trokuta linijskih napona.

U skladu s izrazom (16) vrijedi za fazor faznog napona prve faze da je

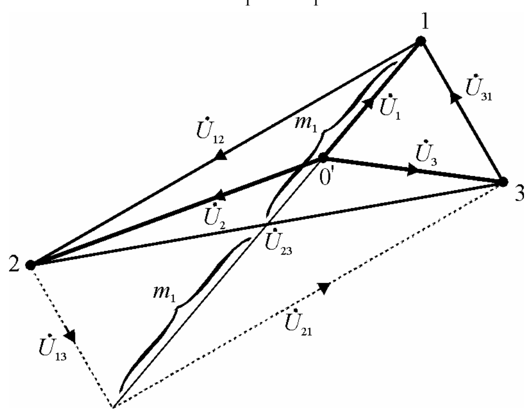
$$3\dot{U}_1 = \dot{U}_{21} + \dot{U}_{31}$$

Ako je nulište u težištu trokuta linijskih napona, to za težišnicu m_1 prema slici 24.5 vrijedi da je

$$\frac{2}{3} m_1 = \left|\dot{U}_1\right|$$

odnosno za sve veličine shvaćene kao da su fazori da je

$$2\dot{m}_1 = 3\dot{U}_1$$



Sl.24.5 U trofaznom sustavu nulište je u težištu trokuta linijskih napona.

No, iz geometrijske konstrukcije neposredno proizlazi da je

$$2\dot{m}_1 + \dot{U}_{12} + \dot{U}_{13} = 0$$

odnosno

$$3\dot{U}_1 = \dot{U}_{21} + \dot{U}_{31}$$

čime je dokazana polazna tvrdnja. Analogno se dokazuje za fazore $\dot{U}_2$ i $\dot{U}_3$!