XXV. PREDAVANJE

Simetrični skup ν-tog reda. Simetrična komponenta ν-tog reda. Jednoznačnost transformacije m fazora u m simetričnih skupova. Pojam referentnog fazora. Određivanje skupa referentnih fazora. Simetrične komponente trofazne mreže: Steinmetzov operator. Direktni, inverzni i nulti (istofazni) sustav. Nesimetrične trofazne mreže. Pojam ciklički simetrične mreže. Direktna, inverzna i nulta impedancija ciklički simetričnog dijela mreže. Opravdanost analize mreža s pomoću simetričnih komponenata. Metoda simetričnih komponenata: postupak, objašnjenje postupka na primjeru.

25. SIMETRIČNE KOMPONENTE VIŠEFAZNIH MREŽA

25.1 POJAM SIMETRIČNE KOMPONENTE

(C.L. Fortescue, 1918.)

Svaki od m *po volji zadanih* kompleksnih brojeva (fazora) $\dot{A}_k$, $k = 1,2,...,m$, može se prikazati kao *zbroj* od m kompleksnih brojeva (fazora) $\dot{B}_{k\nu}$, tj. kao

$$\dot{A}_k = \sum_{\nu=1}^{m} \dot{B}_{k\nu} \qquad (1)$$

gdje je

$$\dot{B}_{k\nu} = \dot{B}_\nu e^{-j\frac{2\pi}{m}(k-1)\nu} \quad ; \quad k = 1,2,\ ...,\ m \qquad (2)$$

Skup $\{\dot{B}_{k\nu}\}$, k = 1,2, ..., m, naziva se *simetričnim skupom ν-tog reda* ili *potpunim fazorskim skupom ν-tog reda*. Element skupa $\dot{B}_{k\nu}$ naziva se ***k*-tom *simetričnom komponentom ν-tog reda***.

Očigledno je moguć jednoznačni prikaz skupa fazora (kompleksnih brojeva) $\{\dot{A}_k\}$ s pomoću fazora (kompleksnih brojeva) $\dot{B}_{k\nu}$. Naime, za potpuno određivanje skupa fazora $\{\dot{A}_k\}$ potrebno je $2m$ podataka (m podataka o modulima i m podataka o faznim kutevima), a isti broj podataka potreban je za m simetričnih skupova, budući da je za svaki simetrični skup potrebno poznavati samo dva podatka, i to *amplitudu* B_ν i *fazni pomak* $2\pi\nu/m$ između dva uzastopna fazora u simetričnom skupu.

U izrazu (2) odabran je slijed indeksa k takav da je u svakom od simetričnih skupova $\{\dot{B}_{k\nu}\}$ fazor $\dot{B}_{1\nu}$ referentan (osnovan). To je, naravno, dogovor i u skladu s njim vrijedi

$$\dot{B}_{1\nu} = \dot{B}_\nu \quad ; \quad |\dot{B}_\nu| = B_\nu$$

tj. sa $\dot{B}_\nu$ označen je ***referentni fazor*** (*osnovni fazor*) u simetričnom skupu ν-tog reda, a sa B_ν amplituda simetričnih komponenata ν-tog reda.

Referentni fazori $\dot{B}_\nu$ određuju se iz poznatog skupa fazora $\{\dot{A}_k\}$ tako da se svaki fazor pomnoži s kompleksnim brojem

$$e^{j\frac{2\pi}{m}(k-1)\mu} \quad , \quad \mu = 1,2,...,m$$

te dobivamo da je

$$\dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{m}(k-1)\mu} = \sum_{\nu=1}^{m} \dot{B}_\nu e^{j\frac{2\pi}{m}(k-1)(\mu-\nu)}$$

Zbrojimo ove jednakosti po svim indeksima k. Proizlazi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{m}(k-1)\mu} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{m} \dot{B}_\nu e^{j\frac{2\pi}{m}(k-1)(\mu-\nu)} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{m} \dot{B}_\nu \sum_{k=1}^{m} e^{j\frac{2\pi}{m}(k-1)(\mu-\nu)}\end{aligned} \qquad (3)$$

Usporedimo li desnu stranu jednakosti s izrazom (24.10), opažamo da vrijedi da je

$$\sum_{\nu=1}^{m} \dot{B}_\nu \sum_{k=1}^{m} e^{-j\frac{2\pi}{m}(k-1)(\mu-\nu)} = S \sum_{\nu=1}^{m} \dot{B}_\nu \qquad (4)$$

pri čemu u skladu s objašnjenjem u odsječku 24.3.1, te uzevši u obzir da je indeks n u ovome slučaju jednak $\mu-\nu$, proizlazi da je

$$S = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases}$$

što uvršteno u izraze (4) odnosno (3) daje izraz za određivanje referentnog fazora $\dot{B}_\nu$, tj.

$$\dot{B}_\nu = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \dot{A}_k e^{j\frac{2\pi}{m}(k-1)\nu} \qquad (5)$$

Napomena: Kut referentnog fazora $\dot{B}_\nu$ određuje orijentaciju simetričnog skupa ν-tog reda. Svi ostali članovi skupa su u odnosu na referentni pomaknuti za kut $2\pi\nu\,(k-1)/m$, gdje je k redni broj fazora u simetričnom skupu.

25.2 SIMETRIČNE KOMPONENTE TROFAZNE MREŽE

Od svih višefaznih mreža, u praksi su najvažnije *trofazne mreže*. U tom slučaju m = 3, te se nesimetrični skup fazora $\dot{A}_k$ (k=1,2,3) može u skladu sa (1) prikazati kao

$$\dot{A}_1 = \dot{B}_{11} + \dot{B}_{12} + \dot{B}_{13} = \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_3$$

$$\dot{A}_2 = \dot{B}_{21} + \dot{B}_{22} + \dot{B}_{23} = \dot{B}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 1\cdot 1} + \dot{B}_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 1\cdot 2} + \dot{B}_3 e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 1\cdot 3}$$

$$\dot{A}_3 = \dot{B}_{31} + \dot{B}_{32} + \dot{B}_{33} = \dot{B}_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 2\cdot 1} + \dot{B}_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 2\cdot 2} + \dot{B}_3 e^{-j\frac{2\pi}{3}\cdot 2\cdot 3}$$

Radi jednostavnijeg pisanja uvodi se tzv. ***Steinmetzov operator***.

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (6)$$

Očigledno je

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \; a^3 = 1 \quad ; \; a^{-1} = a^2 \quad ; \; a^{-2} = a$$

te prethodni sustav jednadžbi poprima oblik

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_3 \\ \dot{A}_2 &= a^2\dot{B}_1 + a\dot{B}_2 + \dot{B}_3 \\ \dot{A}_3 &= a\dot{B}_1 + a^2\dot{B}_2 + \dot{B}_3 \end{aligned} \qquad (7)$$

odnosno u matričnoj notaciji

$$\begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix} \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \\ \dot{B}_3 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

gdje je matrica $\overline{T}$ dana izrazom

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

dok je u skladu s jednadžbom (8)

$$\begin{bmatrix} \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \\ \dot{B}_3 \end{bmatrix} = [T]^{-1}\begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \\ \dot{A}_3 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Umjesto matrične notacije često se koriste izrazi (2) i (5) napisani s pomoću Steinmetzova operatora. Vrijedi:

$$\dot{B}_\nu = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\dot{A}_k a^{(k-1)\nu} \qquad ; \; \nu = 1,2,3 \qquad (11)$$

$$\dot{B}_{k\nu} = \dot{B}_\nu a^{-(k-1)\nu} \qquad ; \; k = 1,2,3 \qquad (12)$$

Primjer:

Zadana su tri fazora $\dot{A}_1 = j$, $\dot{A}_2 = 1$, $\dot{A}_3 = -1$. Odredite fazore svih simetričnih skupova

Rješenje:

U skladu s izrazom (10) ili (11) prvo odredimo referentne fazore simetričnog skupa

a) prvog reda ($\nu = 1$)

$$\dot{B}_1 = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + a\dot{A}_2 + a^2\dot{A}_3) = \frac{1}{3}(1+\sqrt{3})j \approx 0.91j$$

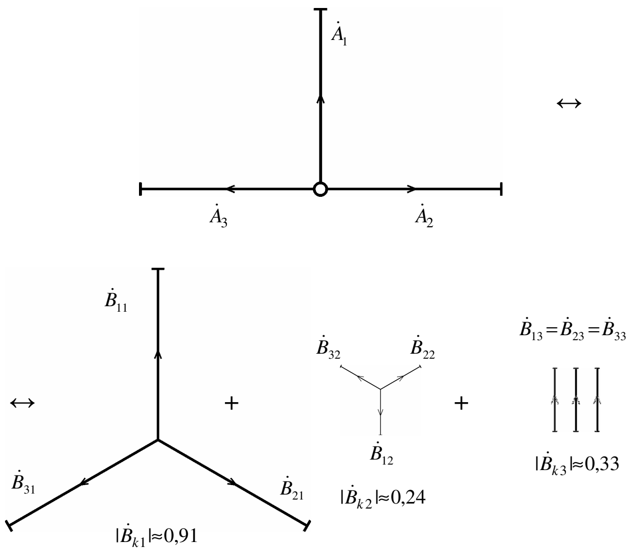
b) drugog reda ($\nu = 2$)

$$\dot{B}_2 = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + a^2\dot{A}_2 + a\dot{A}_3) = \frac{1}{3}(1-\sqrt{3})j \approx -0.24j$$

c) trećeg reda ($\nu = 3$)

$$\dot{B}_3 = \frac{1}{3}(\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) = \frac{1}{3}j \approx 0.33j$$

a zatim se u skladu s izrazom (12) odrede sve preostale simetrične komponente.



Sl. 25.1 Rastav zadanog skupa fazora $\{\dot{A}_k\}$ na simetrične komponente.

Na slici 25.1 opažamo da je *redoslijed faza* simetričnog skupa drugog reda (ν = 2) *promijenjen* u odnosu na redoslijed faza simetričnog skupa prvog reda (ν = 1). Izmjenični motor priključen na simetrični trofazni sustav napona ν = 2 vrtio bi se u suprotnom smjeru od onoga u kojem bi se vrtio priključen na simetrični trofazni sustav napona ν = 1. S druge strane, simetrični skup napona trećeg reda (ν = 3) uopće *ne tvori trofazni sustav* napona nego se svodi na *jednofazni sustav*.

Zbog toga se za trofazne mreže uvode posebne oznake i nazivi. Tako se svaki nesimetrični trofazni sustav napona ili struja rastavlja u tri simetrična sustava napona ili struja, od kojih su *dva trofazna*

- simetrični sustav prvog reda (ν = 1) ili ***direktni sustav***, (indeks "d")
- simetrični sustav drugog reda (ν = 2) ili ***inverzni sustav*** (indeks "i")

te jedan jednofazni

- simetrični sustav trećeg reda ($\nu = 3$) ili ***istofazni*** (***nulti***) ***sustav*** (indeks "0").

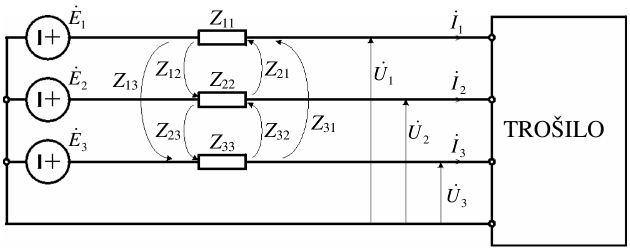
Pripadne su oznake, recimo, za nesimetrični sustav struja analogne izrazima (8) odnosno (10) :

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \dot{I}_d \\ \dot{I}_i \\ \dot{I}_0 \end{bmatrix}$$

Jasno je da su sa $\dot{I}_d, \dot{I}_i$ i $\dot{I}_0$ označeni samo *referentni fazori* odgovarajućih simetričnih sustava struja.

25.3 ANALIZA NESIMETRIČNE TROFAZNE MREŽE

Razmotrit ćemo opći slučaj nesimetrične trofazne mreže, slika 25.2, u ustaljenom sinusoidalnom stanju i s međuinduktivnim djelovanjem između grana. Koristeći



Sl. 25.2 Shema spoja analizirane mreže u frekvencijskom ω - području.

KZN mogu se lako napisati jednadžbe mreže u matričnoj notaciji.

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

gdje je matrica impedancije dana izrazom

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

Prijelazom na simetrične komponente dobivamo

$$[T] \begin{bmatrix} \dot{E}_d \\ \dot{E}_i \\ \dot{E}_0 \end{bmatrix} = [Z][T] \begin{bmatrix} \dot{I}_d \\ \dot{I}_i \\ \dot{I}_0 \end{bmatrix} + [T] \begin{bmatrix} \dot{U}_d \\ \dot{U}_i \\ \dot{U}_0 \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_d \\ \dot{E}_i \\ \dot{E}_0 \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Z][T] \begin{bmatrix} \dot{I}_d \\ \dot{I}_i \\ \dot{I}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}_d \\ \dot{U}_i \\ \dot{U}_0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Prijelazom na simetrične komponente nismo dobili *nikakvo pojednostavljenje proračuna*. Međutim ako je mreža ***ciklički simetrična***, što je najčešće i slučaj, tj. ako je

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_{23} = Z_{31} = Z_M \\ Z_{21} &= Z_{31} = Z_{32} = Z_m \\ Z_{11} &= Z_{22} = Z_{33} = Z \end{aligned}$$

dobiva se da je

$$[T]^{-1}[Z][T] = \begin{bmatrix} Z_d & 0 & 0 \\ 0 & Z_i & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 \end{bmatrix}$$

gdje je

a) $Z_d = Z + a^2 Z_M + a\, Z_m$ (15a)
direktna impedancija

b) $Z_i = Z + a\, Z_M + a^2 Z_m$ (15b)
inverzna impedancija

c) $Z_0 = Z + Z_M + Z_m$ (15c)
nulta (***istofazna***) ***impedancija***

što uvršteno u (14) daje tri međusobno nezavisne jednadžbe

$$\begin{aligned} \dot{E}_d &= Z_d \dot{I}_d + \dot{U}_d \\ \dot{E}_i &= Z_i \dot{I}_i + \dot{U}_i \\ \dot{E}_0 &= Z_0 \dot{I}_0 + \dot{U}_0 \end{aligned} \qquad (16)$$

Iz izloženog proizlazi da se ciklički simetrična mreža u kojoj djeluje nesimetrični trofazni sustav napona razdvaja u *dvije simetrične trofazne mreže* i *jednu jednofaznu mrežu*. Ove se mreže analiziraju *neovisno* jedna o drugoj!

Pitanje: Zašto je bilo potrebno uvesti simetrične komponente, kada je i na prvi pogled jasno da se i uz uvjet cikličke simetrije zadana mreža može lako riješiti nakon što se napišu jednadžbe mreže ?

Problem je u tome da ako u mreži postoje *rotacijski strojevi*, a to je u elektroenergetskim mrežama redovito slučaj, *elementi nadomjesne sheme spoja mreže ne mogu se odrediti* ni na koji drugi način nego samo koristeći pokuse temeljene na rastavu trofaznog sustava u simetrične sustave. Ovim se pokusima određuju *direktna*, *inverzna* i *nulta* impedancija (reaktancija) i uobičajeno je

$$Z_d > Z_i > Z_0$$

osim za rotacijske strojeve s izoliranim zvjezdištem, kod kojih je očigledno $Z_0 = \infty$. U *statičkim mrežama* teorem recipročnosti vrijedi pa je $Z_{kl} = Z_{lk}$, zbog čega je također

$$Z_d = Z_i \neq Z_0$$

Zaključujemo:

a) Ako je *poznata* nadomjesna shema spoja trofazne mreže koristiti se može *bilo koja metoda*.

b) Ako nije poznata nadomjesna shema spoja trofazne mreže, treba njene elemente prvo odrediti mjerenjem. Dobivaju se vrijednosti za Z_d, Z_i i Z_0 nakon čega je u skladu s izrazima (15) lako odrediti elemente nadomjesne sheme

$$Z = \frac{1}{3}(Z_d + Z_i + Z_0) \tag{17}$$

$$Z_M = \frac{1}{3}(aZ_d + a^2 Z_i + Z_0) \tag{18}$$

$$Z_m = \frac{1}{3}(a^2 Z_d + aZ_i + Z_0) \tag{19}$$

Nakon toga analiza se može provesti bilo kojom metodom. *Logično je*, ali ne i nužno da se upotrijebi *metoda simetričnih komponenata*!

25.4 METODA SIMETRIČNIH KOMPONENATA

Ova je metoda posebno pogodna za analizu nesimetrija u trofaznim mrežama. Postupak korištenja ove metode je sljedeći:

a) Analizirana mreža se rastavi u ciklički simetrični dio (CSD)-trofazni izvor i nesimetrični dio (NSD)-trošilo.

b) Za ciklički simetrični dio napišu se jednadžbe mreže s pomoću simetričnih komponenata. Obično u mreži postoje samo izvori direktnog sustava te vrijedi da je $\dot{E}_i = \dot{E}_0 = 0$.

c) Za nesimetrični dio napišu se jednadžbe KZN-a i KZS-a, oblik kojih ovisi o tipu analizirane nesimetrije.

d) Na spoju dijelova mreže (CSD sa NSD) vrijedi načelo neprekinutosti, tj. naponi i struje su s jedne i druge strane mreže jednaki, a time su jednake i njihove simetrične komponente.

e) Sve napone i struje nesimetričnog dijela valja izraziti njihovim simetričnim komponentama.

f) Ovime se dobiva 6 linearnih jednadžbi sa 6 nepoznatih simetričnih komponenata (tri za struje, tri za napone)

g) Iz dobivenih rješenja izraženih s pomoću simetričnih komponenata valja na kraju prijeći u stvarne napone i struje.

Primjer:

Odredite struju jednofaznog zemnog spoja u mreži sheme spoja prema slici 25.3. Izvor pojne mreže je simetrični trofazni generator direktnog sustava.

Rješenje:

ad a,b) Jednadžbe mreže cikličkog simetričnog dijela su

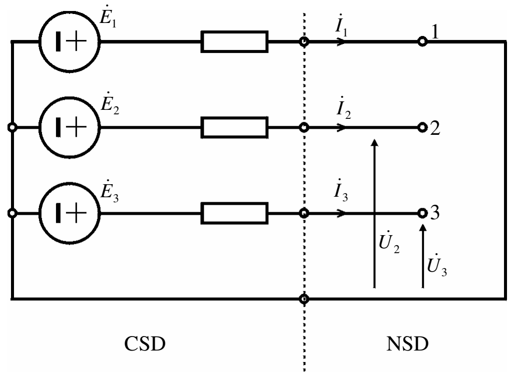
$$\dot{E}_d = Z_d \dot{I}_d + \dot{U}_d \tag{20}$$

$$0 = Z_i \dot{I}_i + \dot{U}_i \tag{21}$$

$$0 = Z_0 \dot{I}_0 + \dot{U}_0 \tag{22}$$

ad c) Jednofazni zemni spoj opisan je jednadžbama mreže nesimetričnog dijela

$$\dot{U}_1 = 0 \quad ; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = 0$$



Sl. 25.3 Shema spoja analizirane trofazne mreže u frekvencijskom ω- području.

ad d,e) Analogno sustavu jednadžbi (7) možemo napisati da je

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_d + \dot{U}_i + \dot{U}_0 = 0 \tag{23}$$

$$\dot{I}_2 = a^2 \dot{I}_d + a\dot{I}_i + \dot{I}_0 = 0 \tag{24}$$

$$\dot{I}_3 = a\dot{I}_d + a^2 \dot{I}_i + \dot{I}_0 = 0 \tag{25}$$

ad f) Jednadžbe (20-25) predstavljaju sustav od 6 linearnih jednadžbi u 6 nepoznanica. Iz (24) i (25) proizlazi da je

$$a^2 \dot{I}_d + a\dot{I}_i + \dot{I}_0 = a\dot{I}_d + a^2 \dot{I}_i + \dot{I}_0$$

odnosno da je

$$\dot{I}_d = \dot{I}_i$$

No, iz (25) je $\dot{I}_0 = \dot{I}_d(-a - a^2)$, a budući da je $1 + a + a^2 = 0$, dobivamo da je i

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_d$$

Zbrojimo li jednadžbe (20-22), dobivamo da je

$$\dot{E}_d = (Z_d + Z_i + Z_0)\dot{I}_d + \dot{U}_d + \dot{U}_i + \dot{U}_0$$

te uzevši u obzir (23) proizlazi da je

$$\dot{I}_d = \dot{I}_i = \dot{I}_0 = \frac{\dot{E}_d}{Z_d + Z_0 + Z_i}$$

ad g) "Stvarna" struja faze 1, tj. fazor struje faze 1 (struje jednofaznog zemnog spoja) je prema tome

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_d + \dot{I}_i + \dot{I}_0 = \frac{3\dot{E}_1}{Z_d + Z_i + Z_0} \tag{26}$$

Na prvi pogled izgleda da se ovaj zadatak može znatno lakše riješiti tako da se u jednadžbe mreže (13) uvrste uvjeti jednofaznog zemnog kratkog spoja, tj. $\dot{U}_1 = 0$ i $\dot{I}_2 = \dot{I}_3 = 0$. Vrijedi da je

$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix}$$

odakle odmah dobivamo da je

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_{11}} \tag{27}$$

No, Z_{11} *ne znamo* tako da postavljeni zadatak uopće *nismo riješili*. Vrijednost impedancije Z_{11} možemo saznati tek nakon mjerenja direktne, inverzne i nulte impedancije. Tada je prema (17)

$$Z_{11} = Z = \frac{1}{3}(Z_d + Z_i + Z_0)$$

što uvršteno u (27) daje istu vrijednost fazora struje faze 1 koju smo dobili prije toga primjenom metode simetričnih komponenata.