XXVII. PREDAVANJE

Primjena teorema mreža. Teorem zamjene: ograničenja, tri načina iskaza teorema. Primjeri primjene teorema zamjene. Teorem superpozicije. Ograničenje na prisilni odziv. Nenulti početni uvjeti kao ekvivalentni istosmjerni naponski i strujni izvori. Primjer primjene: Millmanov teorem. Teorem recipročnosti. Iskaz teorema. Recipročnost osnovnih jednoprilaznih i dvoprilaznih elemenata mreže. Bilateralni elementi mreže. Unilateralni elementi mreže. Nerecipročnost giratora. Opća svojstva recipročnih mreža izvedena s pomoću Tellegenovog teorema. Jednakost prijenosnih admitancija i impedancija. Jednakost prijenosnih omjera napona i struje. Kriterij za ispravan izbor pokusa. Primjeri primjene.

VIII. TEOREMI MREŽA

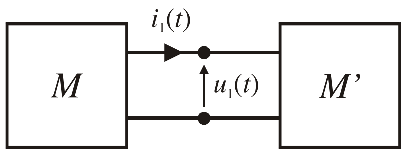
Teoremi mreža su eksplicitni iskazi o nekim svojstvima mreža koja se implicitno nalaze zapisana u jednadžbama KZN-a i KZS-a analizirane mreže. Teoreme mreža ne trebamo ako se u nekoj mreži moraju riješiti jednadžbe mreže, dakle ako treba odrediti valne oblike napona i struja *svih* elemenata mreže. Prava moć teorema mreža ogleda se u slučajevima kada se u nekoj složenoj mreži traži *neko posebno rješenje*, recimo valni oblik napona i struje samo jednog elementa mreže. S pomoću teorema mreža, u mnogim se takvim slučajevima složena mreža može svesti na bitno jednostavniju mrežu čime otpada trud kao i eventualne pogreške pri rješavanju onih dijelova mreže, rezultati kojih nas ionako ne interesiraju.

27. TEOREM ZAMJENE

27.1 ISKAZ TEOREMA

Mnogi problemi u elektrotehnici svode se na analizu dvaju međusobno povezanih jednoprilaza. ***Teorem zamjene*** često pojednostavljuje analizu ovako stvorenih mreža.

Sa M_c označimo mrežu dobivenu povezivanjem dvaju jednoprilaza M i M' prema slici 27.1. Mreže (jednoprilazi) M i M' su mreže po volji, tj. mogu biti linearne, nelinearne, vremenski promjenljive ili nepromjenljive. Jedina ograničenja koja se postavljaju na mreže M_c su



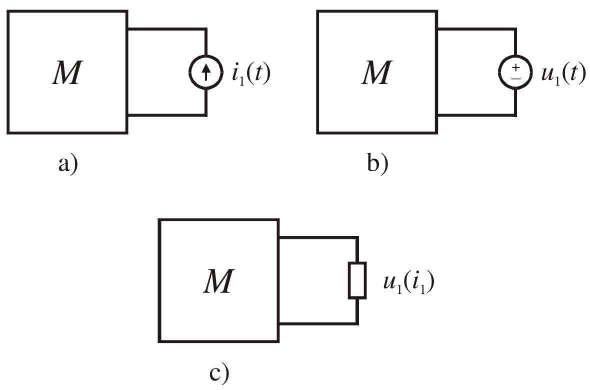
Sl. 27.1 Mreža M_c sastoji se od dva jednoprilaza M i M' po volji.

a) da mreža M_c *ima jednoznačno rješenje*, i
b) da *nema međudjelovanja* između bilo kojeg elementa u M s bilo kojim elementom u M'.

To znači da ne smije, primjerice, jedan namot dvonamotnog transformatora biti u M a drugi u M' ili da upravljačka grana nekog zavisnog izvora bude u M a upravljana grana u M' ili obratno.

Teorem zamjene može se iskazati u tri verzije:

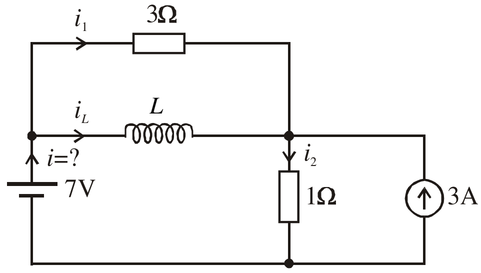
1. Ako je *struja* $i_1(t)$ jednoprilaza *M' poznata*, jednoprilaz M' može se zamijeniti *strujnim uvorom* $i_1(t)$.
2. Ako je *napon* $u_1(t)$ jednoprilaza *M' poznat,* jednoprilaz M' može se zamijeniti *naponskim uvorom* $u_1(t)$.
3. Ako su *napon* $u_1(t)$ i *struja* $i_1(t)$ jednoprilaza *M' poznati,* jednoprilaz M' može se zamijeniti *bilo kojim elementom mreže s identičnom* u_1-i_1 *karakteristikom.*



Sl. 27.2 Tri mogućnosti prikaza mreže M_c.
a) Zamjena jednoprilaza M' strujnim uvorom.
b) Zamjena jednoprilaza M' naponskim uvorom.
c) Zamjena jednoprilaza M' elementom mreže karakteristike $u_1(i_1)$.

27.2 PRIMJERI

a) U mreži sheme spoja prema slici 27.3a odredite valni oblik struje naponskog izvora ako je poznat valni oblik struje induktiviteta $i_L(t)$.



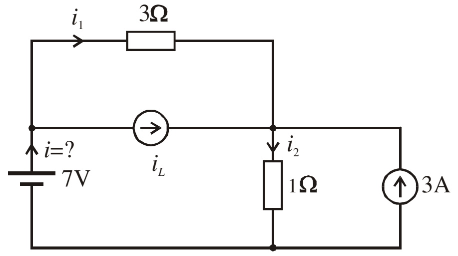
Sl. 27.3 a) Zadana mreža prvog reda.

Rješenje: Zamjenom induktiviteta L strujnim uvorom $i_L(t)$, zadana mreža prvog reda pretvara se u otpornu mrežu, slika 27.3b, za koju vrijede sljedeće jednadžbe mreže

$$i = i_1 + i_L$$
$$i_2 = i_L + i_1 + 3$$
$$7 = 3i_1 + i_2$$

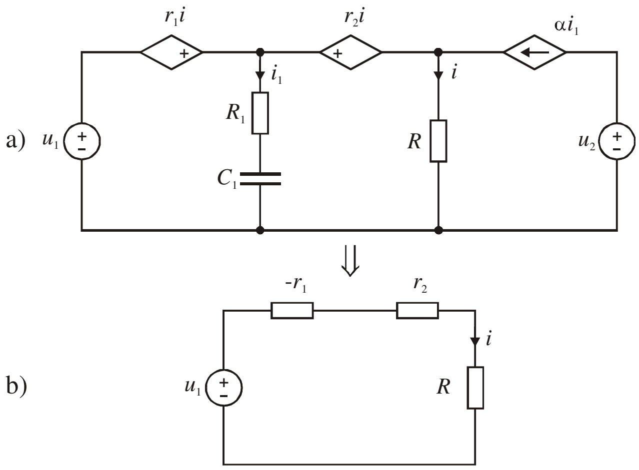
odakle proizlazi da je traženi iznos valni oblik struje naponskog izvora

$$i = 1 + \frac{3}{4} i_L$$



Sl. 27.3 b) Zadana mreža kao otporna mreža.

b) U mreži sheme spoja prema slici 27.4a odredite valni oblik struje kroz otpor R.



Sl. 27.4 a) Zadana mreža.
b) Zadana mreža nakon pojednostavljenja.

Rješenje: U skladu s izloženim u poglavlju 2.5 proizlazi da se grana R_1C_1 može odspojiti jer je spojena paralelno serijskom spoju naponskih izvora $u_1 + r_1 i$. Također u seriju sa strujnim izvorom αi_1 nalazi se naponski izvor u_2 kojeg treba kratko spojiti. No, strujni izvor αi_1 ne određuje struju kroz otpor R te ga možemo odspojiti.

U skladu s teoremom zamjene budući da znamo i struju $i(t)$ i napone $r_1 i$ kao i $r_2 i$ na zavisnim naponskim izvorima, to ove zavisne naponske izvore možemo zamijeniti otporima otpornosti $-r_1$ odnosno r_2. Proizlazi da je

$$i = \frac{u_1}{R + r_2 - r_1}$$

28. TEOREM SUPERPOZICIJE

28.1 ISKAZ TEOREMA (H.Helmholtz, 1853.)

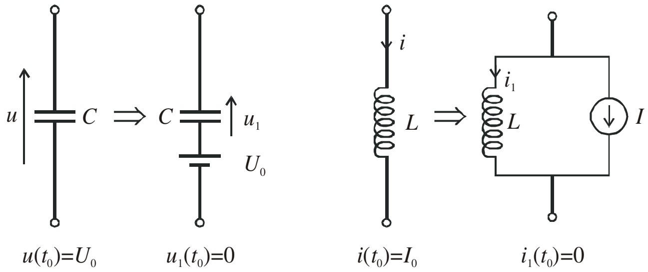
Razmotrimo *linearnu* mrežu M u kojoj od trenutka $t = 0$ djeluje α nezavisnih naponskih izvora $u_{s1}(t)$, $u_{s2}(t)$, ... $u_{s\alpha}(t)$ te β nezavisnih strujnih izvora $i_{s1}(t)$, $i_{s2}(t)$, ... $i_{s\beta}(t)$. Neka je $y(t)$ *prisilni odziv* mreže M zbog djelovanja svih $\alpha + \beta$ nezavisnih izvora i neka je $y_{uk}(t)$ prisilni odziv ako u mreži djeluje samo $u_{sk}(t)$, te neka je $y_{ik}(t)$ prisilni odziv mreže M ako u mreži djeluje samo $i_{sk}(t)$. Tada u skladu s ***teoremom superpozicije*** vrijedi da je za $t \geq 0$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\alpha} y_{uk}(t) + \sum_{k=1}^{\beta} y_{ik}(t)$$

Prisilni odziv mreže koji je posljedica djelovanja svih nezavisnih izvora jednak je *zbroju prisilnih odziva* koje bi prouzrokovao svaki nezavisni izvor sam za sebe ako bi djelovao u mreži za to vrijeme.

Svaki nezavisni *naponski izvor* koji se ne promatra *kratko se spaja*, a svaki nezavisni *strujni izvor* se prekida. Sjetimo se da je svaki naponski izvor poopćeni kratki spoj a svaki strujni izvor poopćeni prekid, poglavlje 2.5.

Ograničenje na prisilni odziv je bitno. Potpuni odziv nije linearna funkcija poticaja dok prisilni odziv to jest, poglavlje 7.2. Međutim, upravo teorem superpozicije nam omogućava da dobijemo osnovnu relaciju između raznih vrsta odziva u linearnim mrežama, tj. da je potpuni odziv jednak zbroju prisilnog i slobodnog odziva. Naime, slobodni odziv se može interpretirati kao poseban slučaj istosmjernog prisilnog odziva ako se elementi mreže u kojima je do trenutka početka promatranja, recimo trenutka $t = t_0$, uskladištena energija, shvate kao kombinacije pasivnih elemenata bez uskladištene energije i odgovarajućih istosmjernih naponskih odnosno strujnih nezavisnih izvora, kako je to već objašnjeno u poglavljima 9.1 i 21.2!



Sl. 28.1 Transformacija reaktivnih elemenata.

Napomena: Obratite pozornost na to da je u poglavlju 9.1 pokazano suprotno, tj. da se u istosmjernim krugovima prisilni odziv može interpretirati kao poseban slučaj slobodnog odziva. Obje tvrdnje su točne, sve ovisi o tome što nam je prije poznato!

VAŽNO:

a) Nenulte početne uvjete, tj. uskladištenu energiju, treba shvatiti kao *djelovanje* ekvivalentnih istosmjernih nezavisnih naponskih odnosno strujnih izvora na mrtvu mrežu. Početni uvjeti su rezultat djelovanja vanjskog svijeta na mrežu do početka promatranja neke pojave ($t \le -0$).
b) Zavisni izvori *ne predstavljaju djelovanje vanjskog svijeta* na mrežu te stoga ostaju nedirnuti u analizi mreža metodom superpozicije.
c) Teorem superpozicije implicira da *u linearnoj mreži nema interakcije* (međudjelovanja) između odziva nastalih kao rezultat djelovanja različitih poticaja.

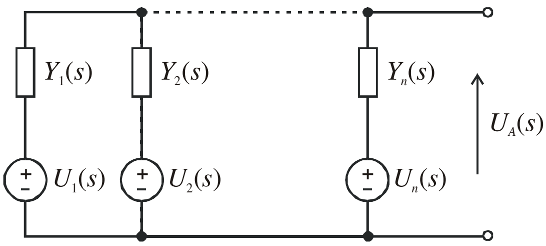
28.2 PRIMJER: MILLMANOV TEOREM

(J. Millman, 1940.)

Dobar primjer primjene teorema superpozicije jest u postupku dokaza Millmanovog teorema. Ovaj teorem iskazan u frekvencijskom s – području izriče da je u mreži u kojoj n naponskih izvora djeluje na isti par sabirnica AA', slika 28.2, napon tih sabirnica $U_A(s)$ dan izrazom

$$U_A(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} U_k(s)\, Y_k(s)}{\sum_{k=1}^{n} Y_k(s)}$$

gdje je $U_k(s)$ Laplaceov transformat napona k-te grane a $Y_k(s)$ jest admitancija k-te grane.



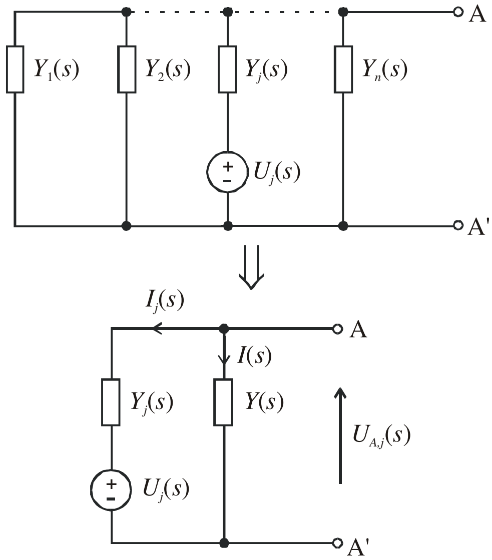
Sl. 28.2 Mreža na koju se odnosi Millmanov teorem.

Ako kratko spojimo sve naponske izvore osim izvora u j-toj grani, kako je to prikazano na slici 28.3, vrijedit će da je

$$I_j(s) + I(s) = 0 \ ; \ \ Y(s) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(s) \ ; \ \ i \ne j$$

odnosno

$$\left[U_{A,j}(s) - U_j(s)\right] Y_j(s) + U_{A,j}(s) \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i(s) = 0 \ ; \ \ i \ne j$$



Sl. 28.3 Uz dokaz Millmanovog teorema.

Proizlazi da je

$$U_{A,j}(s) = \frac{U_j(s)\, Y_j(s)}{\sum_{j=1}^{n} Y_j(s)}$$

No, u skladu s teoremom superpozicije, napon na sabirnicama AA' bit će zbog djelovanja svih izvora jednak

$$U_A(s) = \sum_{j=1}^{n} U_{A,j}(s) = \frac{\sum_{j=1}^{n} U_j(s)\, Y_j(s)}{\sum_{j=1}^{n} Y_j(s)}$$

što i izriče Millmanov teorem.

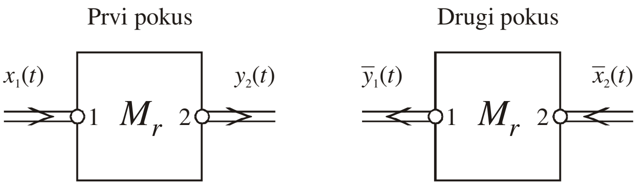
29. TEOREM RECIPROČNOSTI

29.1 ISKAZ TEOREMA

Neka mreža M_r je recipročna ako zamjenom mjesta poticaja i odziva, odzivi prije i poslije zamjene mjesta ostanu jednaki.

"Zamjena mjesta" znači da se poticaj i odziv uvijek odnose na varijable (napon ili struja) različitih grana.

U dokazivanju da je neka mreža recipročna nužna su *dva* pokusa. Označimo sa $x_1(t)$ poticaj koji djeluje na prilazu 1, slika 29.1, a sa $y_2(t)$ odziv koji se pojavljuje na prilazu 2 u prvom pokusu. Također, označimo sa $\overline{x}_2(t)$ poticaj koji djeluje na prilazu 2 a sa $\overline{y}_1(t)$ odziv koji se pojavljuje na prilazu 1 u drugom pokusu.



Sl. 29.1 Dokazivanje recipročnosti.

U skladu s uvedenim oznakama teorem recipročnosti se može iskazati i na ovaj način:

> Mreža M_r je recipročna ako zbog $x_1(t) = \bar{x}_2(t)$ proizlazi da je $\bar{y}_1(t) = y_2(t)$.

Uočimo bitnu činjenicu da na mrežu M_r djeluje *samo jedan poticaj*, što znači da je mreža prije provedbe prvog kao i drugog pokusa bila "*mrtva*".

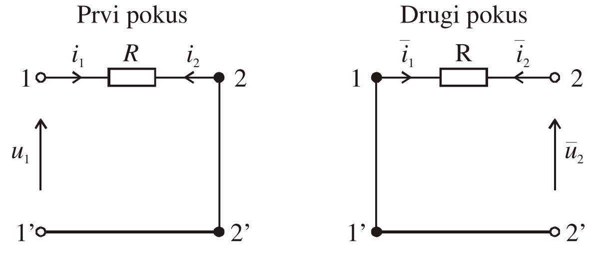
Napomena: Pojam recipročnosti ključan je u mnogim primjenama. Želimo li, primjerice, ostvariti telefonsku liniju između mjesta A i B, onda se ova očigledno mora sastojati od recipročnih komponenata kako bi prijenos signala od A prema B bio jednak prijenosu signala od B prema A!

29.2 RECIPROČNOST ELEMENATA MREŽE

29.2.1 Otpori

Pokažimo da je svaki linearni vremenski nepromjenljivi otpor recipročni element mreže. U tu svrhu provedimo dva pokusa kako je pokazano na slici 29.2. Ako napone u_1 i $\bar{u}_2$ shvatimo kao poticaje, a struje i_2 i $\bar{i}_1$ kao odzive, vrijedit će

$$u_1 = R i_1 = -R i_2 \quad \Rightarrow \quad i_2 = -\frac{u_1}{R}$$
$$\bar{u}_2 = R \bar{i}_2 = -R \bar{i}_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{i}_1 = -\frac{\bar{u}_2}{R}$$



Sl. 29.2 Dokazivanje recipročnosti linearnog vremenski nepromjenljivog otpora.

odakle ako je $u_1 = \bar{u}_2$ očigledno proizlazi i da je $i_2 = \bar{i}_1$, čime je dokazano da je *linearni vremenski nepromjenljivi otpor recipročni element mreže.*

Ako se linearni vremenski nepromjenljivi otpor R nalazi u k-toj grani mreže bit će $u_k = R i_k$, ali i $\bar{u}_k = R \bar{i}_k$, odakle proizlazi da za otpor kao recipročni element mreže vrijedi da je

$$u_k \bar{i}_k = R i_k \bar{i}_k = \bar{u}_k i_k \tag{1}$$

Analognim se postupkom lako pokazuje da je i svaki linearni vremenski promjenljivi otpor recipročni element mreže.

Zaključujemo da je svaki linearni otpor, tj. otpor za koji vrijedi Ohmov zakon, recipročni element mreže. No, svojstvo linearnosti je samo dovoljan uvjet recipročnosti, ali ne i nužan uvjet! Naime, iz same definicije recipročnosti (zamjena mjesta poticaja i odziva!) proizlazi da će i svaki nelinearni otpor neparno simetrične karakteristike biti recipročni element mreže.

Otpor s neparno simetričnom karakteristikom, dakle svi linearni otpori i dio nelinearnih otpora, nazivaju se ***bilateralni otpori***. Svaki bilateralni otpor ujedno je i recipročni element mreže.

Otpori za koje svojstvo bilateralnosti ne vrijedi zovu se nebilateralni otpori ili češće ***unilateralni otpori***. Većina poluvodičkih učinskih ventila te svi nezavisni naponski i strujni izvori pripadaju među unilateralne otpore te stoga nisu recipročni elementi mreža.

U nastavku analize ograničit ćemo se samo na linearne vremenski nepromjenljive otpore.

29.2.2 Reaktivni elementi

"Ohmov zakon" vrijedi u frekvencijskom području za linearne vremenski nepromjenljive kapacitete i induktivitete. Za k-tu granu u kojoj se nalazi ili linearni vremenski nepromjenljivi kapacitet ili induktivitet vrijedit će da je

$$U_k(s)\bar{I}_k(s) = \bar{U}_k(s) I_k(s) \tag{2}$$

što znači da su *linearni vremenski nepromjenljivi reaktivni elementi* recipročni elementi mreže.

Analogno zaključivanju iz prethodnog odsječka proizlazi da su i nelinearni bilateralni reaktivni elementi također recipročni elementi mreže. U nastavku analize nećemo razmatrati ove elemente mreže nego ćemo se ograničiti samo na linearne reaktivne elemente.

29.2.3 Dvoprilazi

a) ***Linearni dvonamotni transformator***

Pretpostavimo da se u j-toj i k-toj grani mreže nalaze namoti linearnog transformatora. U frekvencijskom području konstitutivne relacije glase

$$U_j(s) = s L_{jj} I_j(s) + s M_{jk} I_k(s)$$
$$U_k(s) = s M_{kj} I_j(s) + s L_{kk} I_k(s)$$

odnosno vrijedi da je

$$\begin{aligned} U_j(s)\bar{I}_j(s) + U_k(s)\bar{I}_k(s) = sL_{jj} I_j(s)\bar{I}_j(s) + \\ + sM_{jk} I_k(s)\bar{I}_j(s) + sM_{kj} I_j(s)\bar{I}_k(s) + sL_{kk} I_k(s)\bar{I}_k(s) \end{aligned} \tag{3}$$

Pretpostavimo li nadalje izotropnost medija (poglavlje 5) to će biti

$$M_{jk} = M_{kj} = M$$

te se jednadžba (3) svodi na

$$U_j(s)\bar{I}_j(s) + U_k(s)\bar{I}_k(s) = \bar{U}_j(s)I_j(s) + \bar{U}_k(s)I_k(s) \quad (4)$$

Fizikalno gledano, pretpostavka o izotropnosti medija jest ustvari pretpostavka o recipročnosti, budući da je u izotropnom mediju za transformator svejedno je li poticaj narinut na namot u *j*-toj grani ili na namot u *k*-toj grani. Zbog toga je jednakost (4) uvjet recipročnosti linearnog dvonamotnog transformatora.

Za idealni transformator zbog konstitutivnih relacija

$$U_j(s) = nU_k(s)\ ;\ I_k(s) + nI_j(s) = 0$$

proizlazi da je

$$\begin{aligned} &U_j(s)\bar{I}_j(s) + U_k(s)\bar{I}_k(s) = \\ &= \bar{U}_j(s)I_j(s) + \bar{U}_k(s)I_k(s) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

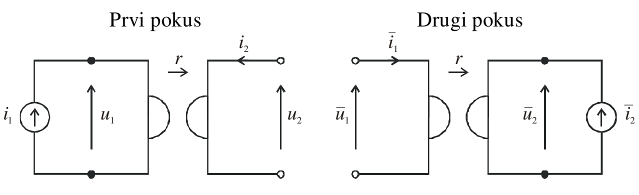
b) ***Linearni zavisni izvori***

Linearni zavisni izvori su modeli električkih dvoprilaznih naprava kod kojih upravljana varijabla ovisi o upravljačkoj, ali obrat ne vrijedi. S toga linearni zavisni izvori nisu recipročni elementi mreže. O tome više u poglavlju 4!

c) ***Girator***

Pokažimo da girator nije recipročni element mreže. U tu svrhu provedimo dva pokusa kako je pokazano na sl. 29.3. Ako struje i_1 i $\bar{i}_2$ shvatimo kao poticaje, a napone u_2 i $\bar{u}_1$ kao odzive, vrijedit će u prvom pokusu, u skladu s konstitutivnim relacijama giratora, izrazi (4.8)

$$u_2 = -ri_1$$



Sl. 29.3 Dokazivanje nerecipročnosti giratora.

a u drugom pokusu će biti

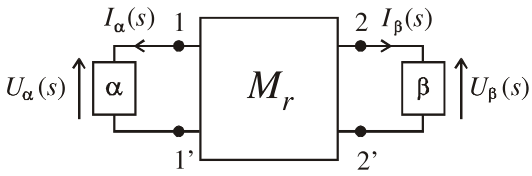
$$\bar{u}_1 = r\bar{i}_2$$

i vidimo da uz $i_1 = \bar{i}_2$ dobivamo da je $\bar{u}_1 = -u_2$, dakle girator nije recipročni element mreže.

29.3 OPĆA SVOJSTVA RECIPROČNIH MREŽA

U nastavku istražit ćemo opća svojstva recipročnih mreža sastavljenih od linearnih vremenski nepromjenljivih otpora, kapaciteta, induktiviteta, magnetski vezanih induktiviteta (transformatora) i idealnih transformatora. Ostali elementi mreže nisu dopušteni.

Pri istraživanju općih svojstava recipročnih mreža upotrijebit ćemo Tellegenov teorem iskazan u frekvencijskom području. Recipročna mreža M_r neka se sastoji od *b* grana, s time da se u svakoj grani nalazi po jedan element. Na prilaze 1 i 2 spojeni su jednoprilazi α i β, slika 29.4.



Sl. 29.4 Dokazivanje recipročnosti korištenjem Tellegenovog teorema.

Prema Tellegenovom teoremu za dvije mreže istog grafa vrijedi da je

$$U_\alpha(s)\bar{I}_\alpha(s) + U_\beta(s)\bar{I}_\beta(s) + \sum_{k=1}^{b} U_k(s)\bar{I}_k(s) = 0 \quad (6a)$$

odnosno

$$\bar{U}_\alpha(s)I_\alpha(s) + \bar{U}_\beta(s)I_\beta(s) + \sum_{k=1}^{b} \bar{U}_k(s)I_k(s) = 0 \quad (6b)$$

U svim granama mreže M_r nalaze se recipročni elementi, za koje vrijedi jednakost (2), odnosno za cijelu mrežu da je

$$\sum_{k=1}^{b} U_k(s)\bar{I}_k(s) = \sum_{k=1}^{b} \bar{U}_k(s)I_k(s)$$

što uvršteno u jednadžbe (6) daje uvjet koji vrijedi za bilo koju recipročnu mrežu

$$U_\alpha(s)\bar{I}_\alpha(s) + U_\beta(s)\bar{I}_\beta(s) = \bar{U}_\alpha(s)I_\alpha(s) + \bar{U}_\beta(s)I_\beta(s) \quad (7)$$

Na osnovi jednadžbe (7) možemo dobiti tri osnovna svojstva svake recipročne mreže. To su

a) jednakost prijenosnih admitancija

$$Y_{21}(s) = Y_{12}(s) \quad (8)$$

b) jednakost prijenosnih impedancija

$$Z_{21}(s) = Z_{12}(s) \quad (9)$$

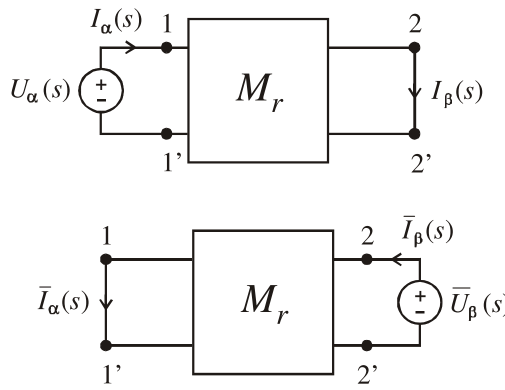
c) jednakost prijenosnog omjera napona i struje

$$\alpha_{21}(s)=A_{12}(s) \qquad (10)$$

ad a) **Jednakost prijenosnih admitancija** dobivamo ako provedemo dva pokusa prema slici 29.5.

Očigledno je $U_\beta(s)=\overline{U}_\alpha(s)=0$, što uvršteno u (7) daje

$$U_\alpha(s)\,\overline{I}_\alpha(s)=\overline{U}_\beta(s)\,I_\beta(s)$$



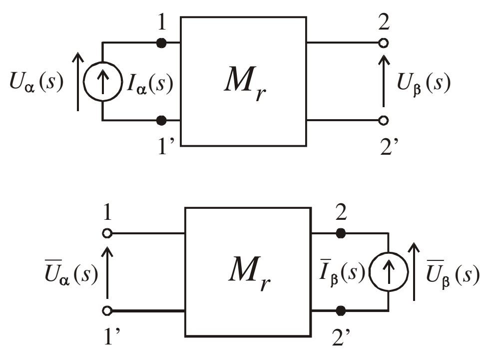
Sl. 29.5 Pokusi kojima se dokazuje jednakost prijenosnih admitancija.

odnosno

$$\frac{I_\beta(s)}{U_\alpha(s)}=\frac{\overline{I}_\alpha(s)}{\overline{U}_\beta(s)}$$

što je na drugi način iskaz jednakosti (8).

ad b) **Jednakost prijenosnih impedancija** dobivamo ako provedemo dva pokusa prema slici 29.6.



Sl. 29.6 Pokusi kojima se dokazuje jednakost prijenosnih impedancija.

Očigledno je $I_\beta(s)=\overline{I}_\alpha(s)=0$, što uvršteno u (7) daje

$$U_\beta(s)\left[-\overline{I}_\beta(s)\right]=\overline{U}_\alpha(s)\left[-I_\alpha(s)\right]$$

odnosno

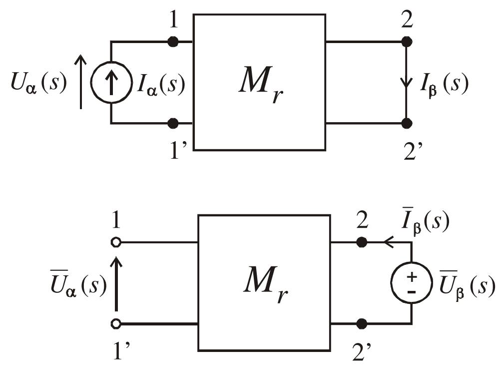
$$\frac{U_\beta(s)}{I_\alpha(s)}=\frac{\overline{U}_\alpha(s)}{\overline{I}_\beta(s)}$$

što je na drugi način iskaz jednakosti (9).

ad c) **Jednakost prijenosnog omjera napona i struja** dobivamo ako provedemo dva pokusa prema slici 29.7.

Očigledno je $U_\beta(s)=\overline{I}_\alpha(s)=0$, što uvršteno u (7) daje

$$0=\overline{U}_\alpha(s)\left[-I_\alpha(s)\right]+\overline{U}_\beta(s)I_\beta(s)$$



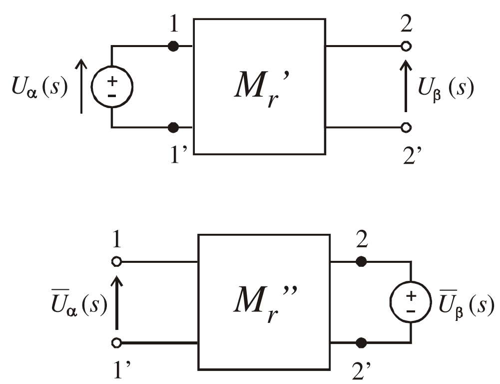
Sl. 29.7 Pokusi kojima se dokazuje jednakost prijenosnih omjera napona i struje.

odnosno

$$\frac{I_\beta(s)}{I_\alpha(s)}=\frac{\overline{U}_\alpha(s)}{\overline{U}_\beta(s)}$$

što je na drugi način iskaz jednakosti (10).

VAŽNO: Zamjenom mjesta poticaja i odziva struktura mreže M_r se *ne smije promijeniti*! Sjetimo se da je svaki naponski izvor poopćeni kratki spoj, a svaki strujni izvor poopćeni prekid. Zbog toga neki parovi pokusa nisu dopušteni jer bi se njima ispitivale različite mreže, kako je to pokazano na primjeru sa slike 29.8. U prvom pokusu mreža M_r je, strukturno gledano, kratko spojena na prilazu 1, a prekinuta na prilazu 2. Tako dobivena mreža, označimo je sa M_r’, u drugom je pokusu promijenjena u neku drugu mrežu, označimo je sa M_r”, budući da je u drugom pokusu mreža M_r, strukturno gledano, kratko spojena na prilazu 2, a prekinuta na prilazu 1.



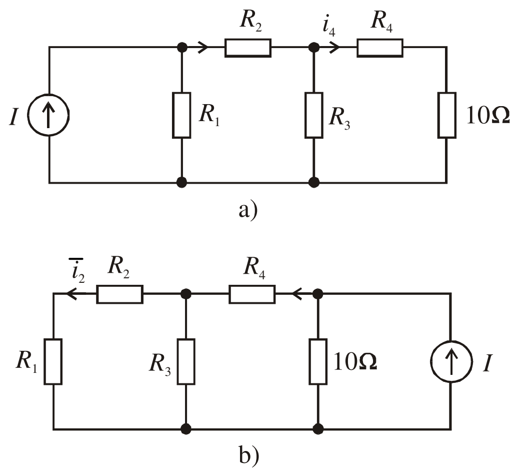
Sl.29.8 Uz nepromijenjenu unutarnju strukturu izborom ovog para pokusa ispituju se ustvari dvije različite mreže!

Obratite pozornost na to da je u prethodno opisana tri para pokusa, u svakom od parova pokusa struktura mreže M_r ostala nepromijenjena!

29.4 PRIMJERI

Teorem recipročnosti često bitno olakšava analizu mreža. Pokažimo to na dva karakteristična primjera.

a) Na otpornoj mreži prema slici 29.9 koja se sastoji od jednog poznatog otpora i četiri otpora nepoznate otpornosti provedena su dva mjerenja. U prvom mjerenju, slika 29.9a, izmjerena je struja $i_4 = 0{,}3I$, dok je



Sl. 29.9 Pokusi na zadanoj otpornoj mreži.

u drugom mjerenju izmjerena struja $\bar{i}_2$=0,2I. Odredite otpornost otpora R_1!

Rješenje: Mreža je recipročna, a zadani se problem svodi na varijantu teorema recipročnosti prikazanu na slici 29.6.

Na osnovi prvog mjerenja proizlazi da je

$$u_\beta = 10 \cdot i_4 = 10 \cdot 0.3 \cdot I = 3I$$

Na osnovi drugog mjerenja proizlazi da je

$$\bar{u}_\alpha = R_1 \bar{i}_2 = 0.2 R_1 I$$

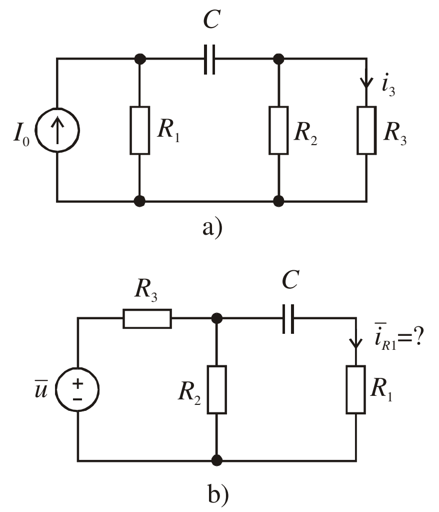
Budući da je $i_\alpha = i_\beta = I$, zbog recipročnosti mreže vrijedi da je $\bar{u}_\alpha = u_\beta$. Dakle,

$$3I = 0.2 R_1 I$$

odnosno

$$R_1 = 15\Omega$$

b) Ako se na mrežu sheme spoja prema slici 29.10a narine od trenutka $t = 0$ poticaj $i(t) = I_0$, struja kroz otpor R_3 je valnog oblika $i_{R3} = I_1 e^{-\alpha t}$. Odredite valni oblik struje kroz otpor R_1, u mreži sheme spoja prema slici 29.10b, ako se od trenutka $t=0$ narine poticaj $\bar{u}(t) = U\,e^{-\delta t}$. Poznata je otpornost otpora R_1, a ostali parametri mreže nisu poznati.



Sl. 29.10 Zadane sheme spoja mreža.

Rješenje: Opažamo da su obje mreže po strukturi jednake. U skladu s varijantom teorema recipročnosti prikazanom na slici 29.7 vrijedi da je

$$\mathcal{L}[i(t)] \cdot \mathcal{L}[R_1 \bar{i}_{R1}(t)] = \mathcal{L}[\bar{u}(t)] \cdot \mathcal{L}[i_{R3}(t)]$$

odnosno

$$\frac{I_0}{s} \cdot R_1 \bar{I}_{R1}(s) = \frac{U}{s+\delta} \cdot \frac{I_1}{s+\alpha}$$

te je struja kroz otpor R_1 u frekvencijskom području dana izrazom

$$\bar{I}_{R1}(s) = \frac{U}{R_1 I_0} I_1 \frac{s}{(s+\delta)(s+\alpha)} = \frac{U}{R_1 I_0} I_1 \frac{1}{\alpha - \delta}\left[\frac{\alpha}{s+\alpha} - \frac{\delta}{s+\delta}\right]$$

odnosno u vremenskom području

$$\bar{i}_{R1}(t) = \frac{U}{R_1 I_0} \frac{I_1}{\alpha - \delta}(\alpha e^{-\alpha t} - \delta e^{-\delta t}).$$