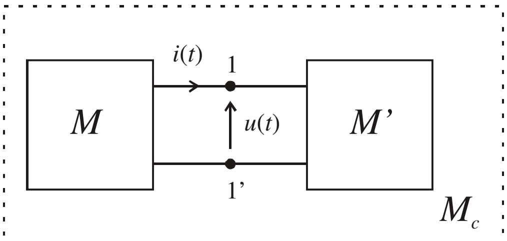
XXVIII. PREDAVANJE

Rastav mreže na dva jednoprilaza: linearni jednoprilaz i jednoprilaz po volji. Iskaz Thévenin - Nortonovog teorema. Théveninova nadomjesna mreža. Nortonova nadomjesna mreža. Dokaz Théveninovog teorema: primjena teorema zamjene i teorema superpozicije. Ograničenja proizašla iz primjene teorema zamjene. Iskaz Thévenin-Nortonovog teorema u frekvencijskom području. Primjer određivanja elemenata Nortonove nadomjesne mreže. Analiza osjetljivosti: primjer promjene vrijednosti impedancije jedne grane mreže. Određivanje maksimalne snage ako je zadana Théveninova nadomjesna mreža: važnost u elektronici i nevažnost u elektroenergetici.

30. THÉVENIN-NORTONOV TEOREM

30.1 ISKAZ TEOREMA (H. Helmholtz, 1853.; L. Thévenin, 1883.; E. L. Norton,1926.)

Pretpostavimo da se neka zadana mreža M_c može prikazati spojem dvaju jednoprilaza, slika 30.1. Pri tome neka je jednoprilaz M *linearan* (vremenski promjenljiv ili nepromjenljiv), dok je jednoprilaz M' *po volji*, dakle nelinearan ili linearan i/ili vremenski promjenljiv ili vremenski nepromjenljiv.

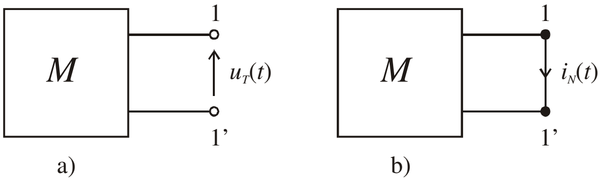


Sl. 30.1 Mreža M_c sastoji se od linearnog jednoprilaza M i po volji jednoprilaza M'.

Pretpostavimo također da mreža M_c ima jednoznačno rješenje.

Sa M_0 označimo jednoprilaz koji se dobije iz jednoprilaza M tako da se svi nezavisni izvori i svi početni uvjeti stave jednakima nuli, dakle jednoprilaz M_0 jest "mrtvi" jednoprilaz M.

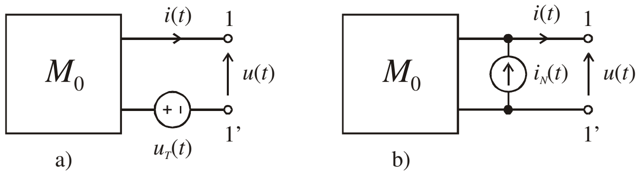
Također sa $u_T(t)$ označimo *napon praznog hoda* jednoprilaza M promatran s prilaza 1, slika 30.2a, odnosno sa $i_N(t)$ označimo *struju kratkog spoja* jednoprilaza M na prilazu 1, slika 30.2b.



Sl. 30.2 a) Uz definiciju napona praznog hoda $u_T(t)$ – Théveninovog napona.
b) Uz definiciju struje kratkog spoja $i_N(t)$ – Nortonove struje.

Uzevši u obzir sve navedene pretpostavke i oznake, Thévenin-Nortonov teorem izriče:

Neovisno o karakteru jednoprilaza M', napon $u(t)$ odnosno struja $i(t)$ na prilazu 1 ostaju nepromijenjeni ako se jednoprilaz M zamijeni ili Théveninovom nadomjesnom mrežom ili Nortonovom nadomjesnom mrežom, slika 30.3.



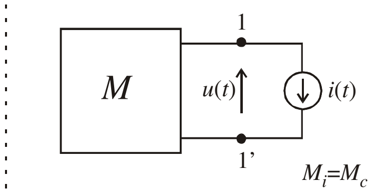
Sl. 30.3 a) Théveninova nadomjesna mreža jednoprilaza M.
b) Nortonova nadomjesna mreža jednoprilaza M.

Iskaz teorema s pomoću Théveninove nadomjesne mreže nazivamo ***Théveninov teorem***, a s pomoću Nortonove nadomjesne mreže ***Nortonov teorem***.

30.2 DOKAZ TEOREMA

Dokazat ćemo samo Théveninov teorem. Primijenivši načelo dualnosti kasnije se lako dokaže i Nortonov teorem. Provedimo dokaz u četiri koraka.

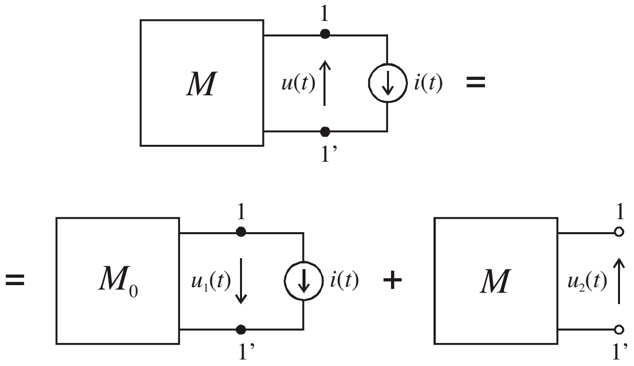
a) U mreži *M svi početni uvjeti* prikažu se s pomoću *ekvivalentnih istosmjernih nezavisnih izvora.* U skladu s objašnjenjem u odsječku 28.1 početni napon na kapacitetu zamijeni se istosmjernim nezavisnim naponskim izvorom u seriju s kapacitetom a početna struja induktiviteta istosmjernim nezavisnim strujnim izvorom spojenim paralelno pripadnom induktivitetu.
b) U skladu s *teoremom zamjene* jednoprilaz M' zamijeni se *strujnim uvorom* $i(t)$, slika 30.4. Stvorena mreža M_i jest *linearna* a njeno rješenje je, u skladu s osnovnom pretpostavkom teorema zamjene, jednoznačno.



Sl. 30.4 Jednoprilaz M' zamijenjen je strujnim uvorom.

c) Budući da je mreža $M_i = M_c$ linearna to se može primijeniti *teorem superpozicije*. Prikažimo mrežu M_i na način kako je to prikazano na slici 30.5. Tada je napon na prilazu 1 jednak

$$u(t) = -u_1(t) + u_2(t) \tag{1}$$



Sl. 30.5 Rastav linearne mreže M_i u skladu s teoremom superpozicije.

Pri tome je $u_1(t)$ prisilni odziv jednoprilaza M na poticaj $i(t)$. Strujni uvor $i(t)$ interpretiramo sada kao strujni izvor, koji djeluje na mrtvi jednoprilaz M, dakle na jednoprilaz označen sa M_0. U skladu s teoremom konvolucije (odsječak 19.2) bit će

$$u_1(t) = \int_0^t h(t-x)i(x)dx \ ; \quad t \geq 0$$

gdje je $h(t)$ impulsni odziv jednoprilaza M_0. Ako je mreža linearna i vremenski promjenljiva, vrijedi da je

$$u_1(t) = \int_0^t h(t,x)i(x)dx \ ; \quad t \geq 0$$

gdje je sa $h(t,x)$ označen impulsni odziv jednoprilaza M_0 u trenutku t zbog jediničnog impulsa narinutog na jednoprilaz M_0 u trenutku x.

Prisilni odziv jednoprilaza M kad u mreži M_i djeluju samo nezavisni izvori iz jednoprilaza M upravo je jednak Théveninovom naponu $u_T(t)$, tj. naponu praznog hoda jednoprilaza M

$$u_2(t) = u_T(t) \tag{2}$$

budući da je tada strujni "izvor" $i(t)$ prekinut.

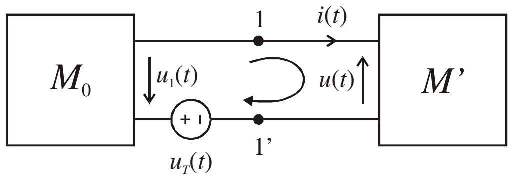
Napon na prilazu 1 je za vremenski nepromjenljivu mrežu M jednak

$$u(t) = -\int_o^t h(t-x)i(x)dx + u_T(t) \tag{3}$$

d) Razmotrimo Théveninovu nadomjesnu mrežu prema slici 30.6. Napišemo li KZN za naznačenu petlju, dobivamo da je

$$u_T(t) - u_1(t) - u(t) = 0$$

a to je upravo jednadžba (1), uzme li se u obzir jednakost (2). Time smo pokazali da Théveninova nadomjesna mreža ima na promatranom prilazu isti valni oblik napona i struje kao i zadana mreža M_c, čime je teorem dokazan.



Sl 30.6 Uz dokaz Théveninovog teorema.

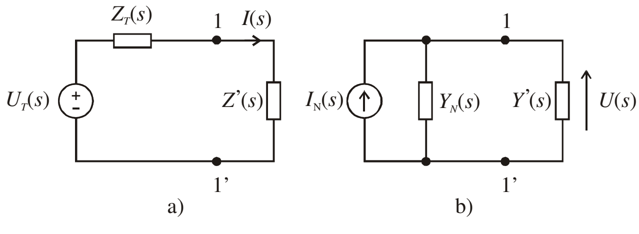
VAŽNO:

a) Pri izvođenju teorema korišteni su *teorem zamjene* i *teorem superpozicije*. Ovo znači da Thévenin--Nortonov teorem vrijedi za mreže s jednoznačnim rješenjem kao i za mreže u kojima nema međudjelovanja između oba jednoprilaza M i M'. Proizlazi da teorem *ne važi za mreže s magnetski vezanim induktivitetima* kod kojih bi jedna grana bila u jednoprilazu M a druga u jednoprilazu M'. Isto vrijedi i za *zavisne izvore*. Linearnost jednoprilaza M je bitna, inače se ne može primijeniti teorem superpozicije.
b) Osnovna vrijednost teorema jest u tome da je njime dopušteno da se u nekoj mreži po volji *bilo koji dio mreže koji tvori linearni jednoprilaz zamijeni sa samo dva elementa mreže* a da se tim postupkom ne mijenja rješenje cjelokupne mreže.

30.3 ISKAZ THÉVENIN-NORTONOVOG TEOREMA U FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

Ako je analizirana mreža M_c linearna i vremenski nepromjenljiva, Thévenin-Nortonov teorem može se iskazati na vrlo jednostavan način u frekvencijskom području.

Pretpostavimo da je jednoprilaz M' pasivan, te označimo njegovu impedanciju sa $Z'(s)$ a impedanciju jednoprilaza M_0 sa $Z_T(s)$, koja se uobičajeno zove **Théveninova impedancija**.



Sl. 30.7 a) Théveninova nadomjesna mreža u frekvencijskom području.
b) Nortonova nadomjesna mreža u frekvencijskom području.

Dobivamo krug za koji vrijedi da je

$$I(s) = \frac{U_T(s)}{Z_T(s) + Z'(s)} \tag{4}$$

gdje je $U_T(s) = \mathcal{L}\,[u_T(t)]$

Transformacijom naponskog izvora u strujni izvor dobivamo elemente *Nortonove nadomjesne mreže*, tj.

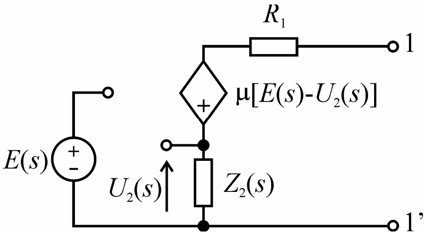
$$I_N(s) = \frac{U_T(s)}{Z_T(s)}\ ;\ \ Y_N(s) = \frac{1}{Z_T(s)} \tag{5}$$

te se za napon prilaza 1 dobiva da je

$$U(s) = \frac{I_N(s)}{Y_N(s) + Y'(s)} \tag{6}$$

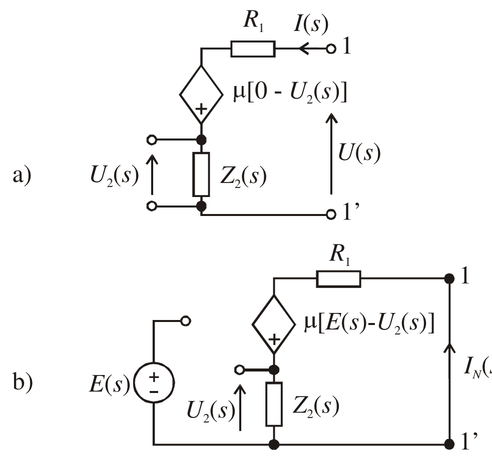
gdje je $Y'(s) = \dfrac{1}{Z'(s)}$, tj. *admitancija jednoprilaza M'.*

Primjer: Odredite elemente Nortonove nadomjesne mreže promatrano s prilaza 1 za mrežu sheme spoja prema slici 30.8



Sl. 30.8 Zadana shema spoja mreže u frekvencijskom području.

Rješenje: Théveninovu impedanciju, a time i *Nortonovu admitanciju*, najlakše odredimo tako ako zamislimo da na prilazu 1 djeluje neki naponski izvor $U(s)$ koji uzrokuje struju $I(s)$ na prilazu 1 uz utrnute nezavisne izvore, slika 30.9a.



Sl. 30.9 a) Uz određivanje Nortonove admitancije $Y_N(s)$.
b) Uz određivanje Nortonove struje $I_N(s)$.

Proizlazi da je

$$U(s) = R_1 I(s) - \mu[0 - U_2(s)] + U_2(s)$$

Budući da je $U_2(s) = Z_2(s)\,I(s)$, odmah dobivamo da je

$$Y_N(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{[R_1 + (1+\mu)Z_2(s)]}$$

Nortonova struja određuje se iz mreže, slika 30.8, ako se prilaz 1 kratko spoji kako je to pokazano na slici 30.9b. Vrijedi da je

$$R_1\, I_N(s) - \mu[E(s) - U_2(s)] + U_2(s) = 0$$

Budući da je $U_2(s) = Z_2(s)\,I(s)$, odmah dobivamo da je

$$I_N(s) = \mu E(s) Y_N(s)$$

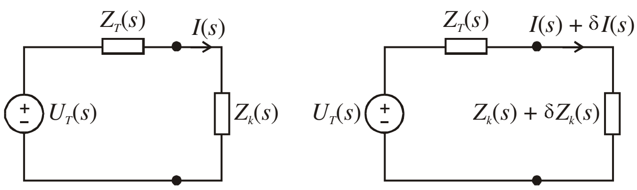
30.4 NEKE PRIMJENE THÉVENIN-NORTONOVOG TEOREMA

30.4.1 Analiza osjetljivosti

Često je u praksi važno znati kako se mijenja odziv ako se pri zadanom poticaju zbog nekog razloga promijeni neki od parametara mreže. Razlozi mogu biti starenje, utjecaj temperature, tolerancije proizvođačke karakteristike i dr. Analize ovog tipa zovu se ***analize osjetljivosti***.

Thévenin-Nortonov teorem posebno je prikladan za analizu osjetljivosti budući da se njime lako obuhvaćaju svi problemi u kojima se mijenja samo jedan parametar.

Pretpostavimo linearnu vremenski nepromjenljivu mrežu u kojoj želimo istražiti *posljedice promjene impedancije*, u nekoj, recimo, k-toj grani. Tada s obzirom na tu granu zamijenimo cjelokupnu mrežu Théveninovom nadomjesnom mrežom, slika 30.10, a sa $Z_k(s)$ označimo impedanciju k-te grane.



Sl. 30.10 Primjer kada se impedancija k-te grane $Z_k(s)$ promijeni na vrijednost $Z_k(s) + \delta Z_k(s)$.

Prije promjene vrijednosti impedancije vrijedilo je da je

$$U_T(s) = [Z_T(s) + Z_k(s)]I(s) \tag{7}$$

a nakon promjene vrijednosti impedancije da je

$$U_T(s) = [Z_T(s) + Z_k(s) + \delta Z_k(s)][I(s) + \delta I(s)] \tag{8}$$

budući da se ostatak mreže zamijenjen Théveninovom nadomjesnom mrežom nije promijenio. Uvrsti li se (7) u (8) dobivamo

$$0 = I(s)\delta Z_k(s) + \delta I(s)[Z_T(s) + Z_k(s)] + \delta I(s)\delta Z_k(s)$$

Ako je promjena $\delta Z_k(s)$ malena tada je član $\delta I(s)\delta Z_k(s)$ pogotovo malen i može se zanemariti, te dobivamo da je

$$\frac{\delta I(s)}{I(s)} \approx \frac{-\delta Z_k(s)}{Z_T(s)+Z_k(s)} \qquad (9)$$

što nam omogućuje da ocijenimo *utjecaj promjene vrijednosti* impedancije $Z_k(s)$ na odziv mreže u grani u kojoj je došlo do promjene.

30.4.2 "Prijenos" maksimalne snage

Pretpostavimo da je *zadana*, neka mreža koja se nalazi u sinusoidalnom ustaljenom stanju. Na jedan od njenih prilaza želimo priključiti trošilo ali takve impedancije da bi snaga "predana" tom jednoprilaznom trošilu bila *maksimalna*.

Budući da je mreža zadana to je s obzirom na zadani prilaz poznat i fazor Théveninovog napona $\dot{U}_T(\omega)$ kao i Théveninova impedancija $Z_T(j\omega) = R_T + jX_T$. Pretpostavimo također da je impedancija trošila $Z(j\omega) = R + jX$ takva da se realni dio R i imaginarni dio X impedancije $Z(j\omega)$ *mogu mijenjati nezavisno jedan od drugoga*.

Snaga trošila dana je izrazom

$$P = RI^2 = U_T^2 \frac{R}{(R_T+R)^2 + (X_T+X)^2} = P(R,X) \qquad (10)$$

gdje je U_T efektivna vrijednost jednoharmonijskog napona poticaja.

Snaga trošila ovisi o dvjema nezavisnim varijablama R i X. U prvi trenutak pretpostavimo da je R konstantan i odredimo vrijednost od X za koju će snaga trošila biti maksimalna. Proizlazi

$$\frac{\partial P}{\partial x} = RU_T^2 \frac{-2(X_T+X)}{\left[(R_T+R)^2+(X_T+X)^2\right]^2} = 0$$

odnosno da mora biti zadovoljeno da je

$$X = -X_T \qquad (11)$$

Uvrsti li se ovaj uvjet u (10) dobivamo da je

$$P = U_T^2 \frac{R}{(R_T+R)^2} = P(R)$$

odakle uzevši u obzir uvjet $\frac{\partial P}{\partial R} = 0$ proizlazi da je

$$R = R_T \qquad (12)$$

Iz uvjeta (11) i (12) zaključujemo da se maksimalna snaga trošila postiže ako je

$$Z(j\omega) = Z_T^*(j\omega) = R_T - jX_T \qquad (13)$$

tj. ako je impedancija trošila jednaka *konjugiranoj* vrijednosti Théveninove impedancije.

Zaključujemo:

a) Budući da je $R = R_T$, samo 50% energije izvora prenosi se u trošilo! Ipak, to je najviše što se može učiniti ako je ***Théveninova impedancija zadana***, dakle ako se na njenu vrijednost ne može utjecati. Takav je slučaj u elektronici. U komunikacijskim ili instrumentacijskim sustavima Z_T je zadan i poželjno je da se što više energije izvora signala prenese u trošilo.

b) U elektroenergetici je upravo obrnuto! Stupanj djelovanja prijenosa energije je jedini važan, izvori se projektiraju tako da je R_T što je moguće manji. ***Théveninova impedancija nije zadana!***

c) Ako se komponente impedancije $Z(j\omega)$ ne mogu nezavisno mijenjati nego se može mijenjati samo modul impedancije $|Z(j\omega)|$, to se lako dobiva analogno prethodnom postupku da se maksimalna snaga trošila postiže ako su moduli Théveninove impedancije i trošila jednaki, tj. ako je

$$|Z(j\omega)| = |Z_T(j\omega)|$$

Napomena: Pojmovi kao što su *prijenos snage, primljena* ili *predana snaga, tok snage* uobičajeni su u elektrotehnici, iako ne znače ništa stvarno i doslovnim tumačenjem mogli bi izazvati zbrku. Naime, trenutna snaga (analogno tome i djelatna snaga) neke mreže jest brzina kojom se na prilazima te mreže prenosi energija iz vanjskog svijeta ili se iz te mreže energija prenosi u vanjski svijet. Unutar mreže električna energija se privremeno skladišti ili pretvara u neki drugi oblik energije. Fizikalno gledano, ima smisla govoriti o prijenosu energije, primljenoj ili predanoj energiji te o toku energije.

No, snaga je odlučujući faktor koji određuje dimenzije komponenata stvarne mreže i zbog toga je, iako strogo govoreći pogrešno, sa stajališta inženjerske prakse kudikamo spretnije razmišljati o energetskim procesima u mrežama u terminima snage. Primjerice, samo iz podatka da se u nekom otporniku u toplinu pretvorilo 20Wh električne energije ne može se o tom otporniku ništa zaključiti. Nasuprot tome, podatak o tome da je snaga nekog otpornika 20W iskusnom inženjeru već govori mnogo!