

## XXIX. PREDAVANJE

Pojam dvoprilaza. Topološki prikaz dvoprilaza. Ograničenje na linearne vremenski nepromjenljive dvoprilaze. Šest načina opisa dvoprilaza dvjema linearnim jednadžbama. Strujne jednadžbe: admitancijski parametri, nadomjesna  $\pi$  - shema spoja recipročnog dvoprilaza. Naponske jednadžbe: impedancijski parametri, nadomjesna  $T$  - shema spoja recipročnog dvoprilaza. Pojam simetričnog dvoprilaza. Hibridne jednadžbe:  $h$ - i  $g$ - parametri, zahtjevi na recipročne i simetrične dvoprilaze. Prijenosne jednadžbe: dogovor o predznaku izlazne struje,  $a$ - i  $b$ - parametri, zahtjevi na recipročne i simetrične dvoprilaze.

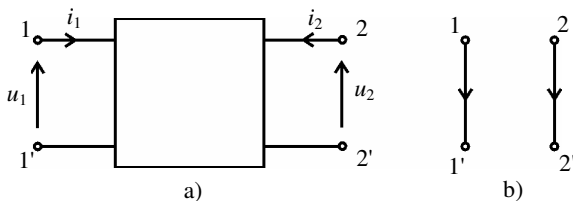
### IX. DVOPRILAZI

U elektrotehnici **dvoprilaz** ili četveropol jest svaka električka naprava ili skup električkih naprava sa dva para priključnica kojemu je namjena prijenos električne energije (signala) od generatora (izvora signala) do trošila (prijamnika signala). Karakteristični primjeri dvoprilaza su filtri, dvonamotni transformatori, par električkih vodova i dr.

U teoriji mreža dvoprilaz je svaka električka mreža kojoj su električka svojstva dana *samo s obzirom na dva para priključaka (dva prilaza)*, tj. izražena su s pomoću funkcionalnih odnosa između napona i struja na prilazima. Dvoprilaz shvaćamo kao tzv. *crnu kutiju*, tj. mrežu interna struktura koje nam ostaje nepoznata.

### 31. JEDNADŽBE DVOPRILAZA

Slika 31.1a prikazuje dvoprilaz. Jedan od prilaza, obično indeksiran sa 1, naziva se **ulaz** a drugi prilaz, obično indeksiran sa 2, naziva se **izlaz**. Spoj između vanjskih mreža koje se priključuju na ulaz odnosno izlaz jest *samo* preko dvoprilaza. Time je zajamčena definicija prilaza (poglavlje 2.), tj. da su struje istog prilaza na priključcima jednake ali suprotnog predznaka. Ovo također znači da se *svaki dvoprilaz* u topološkom smislu može prikazati *s pomoću dvije odvojene grane* i svaka je do njih spojena s granama koje pripadaju ili dijelu vanjske mreže priključenom na ulaz dvoprilaza ili dijelu vanjske mreže priključenom na izlaz dvoprilaza.



Sl. 31.1 a) Dvoprilaz i pridruženi referentni smjerovi napona i struja.  
b) Graf dvoprilaza.

U analizi dvoprilaza ograničit ćemo se na analizu **linearnih vremenski nepromjenljivih dvoprilaza** u kojima *nema nezavisnih izvora*. Također pretpostavit ćemo da u dvoprilazima nema prethodno uskladištene energije, dakle određivat ćemo samo *prisilne odzive*.

Uz ove pretpostavke svaki dvoprilaz se u potpunosti može opisati u frekvencijskom  $s$  – području. Za razliku od prethodnih poglavlja, ekonomičnosti zapisa radi, ispustit ćemo pri pisanju varijabli mreža kao i funkcija mreža naznaku da ovise o nezavisnoj varijabli  $s = \sigma + j\omega$ .

Tako ćemo, primjerice, Laplaceove transformate napona i struja na ulazu označiti sa

$$\mathcal{L}[u_1(t)] = U_1 \quad ; \quad \mathcal{L}[i_1(t)] = I_1$$

a Laplaceove transformate napona i struja na izlazu sa

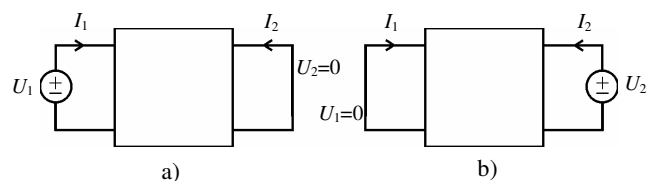
$$\mathcal{L}[u_2(t)] = U_2 \quad ; \quad \mathcal{L}[i_2(t)] = I_2$$

s istim sustavom referentnih smjerova kao na slici 31.1a.

Budući da se topološki gledano dvoprilaz sastoji od dviju grana i da nas interesiraju samo linearni dvoprilazi, to će za potpuni opis dvoprilaza dostajati **dvije linearne jednadžbe** u četiri varijable:  $U_1, I_1, U_2, I_2$ . Koje će se od ovih varijabli smatrati nezavisnim (poticajima) a koje zavisnim (odzivima), ovisit će o konkretnom problemu. Očigledno, dvije će varijable biti nezavisne a preostale dvije zavisne, što znači da se opis nekog dvoprilaza može iskazati na šest različitih načina, tj. s pomoću šest različitih skupova od po dvije linearne jednadžbe.

#### 31.1 STRUJNE JEDNADŽBE

Jedan od skupova od po dvije linearne jednadžbe dvoprilaza dobiva se ako se naponi prilaza shvate kao nezavisne varijable.



Sl. 31.2 Pokusi s pomoću kojih se određuju admitancijski parametri.

Ovaj se skup jednadžbi naziva još i **strujne jednadžbe** dvoprilaza i glasi:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 &= y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Parametri  $y_{ij}$  nazivaju se **admitancijskim parametrima** i određuju se iz dva pokusa kratkog spoja, slika 31.2

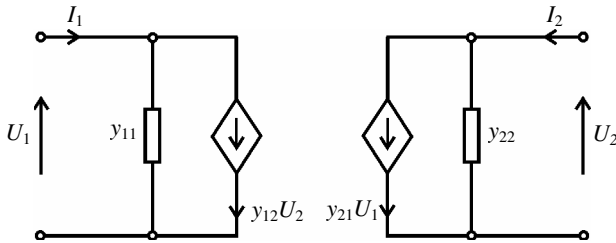
Tako se iz pokusa kratkog spoja prema slici 31.2a određuju parametri

$$y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} ; \quad y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} \quad (2)$$

a iz pokusa kratkog spoja prema slici 31.2b parametri

$$y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} ; \quad y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0} \quad (3)$$

Parametri  $y_{12}$  i  $y_{21}$  nazivaju se **prijenosne admitancije**, parametar  $y_{11}$  **ulazna admitancija**, a parametar  $y_{22}$  **izlazna admitancija**.



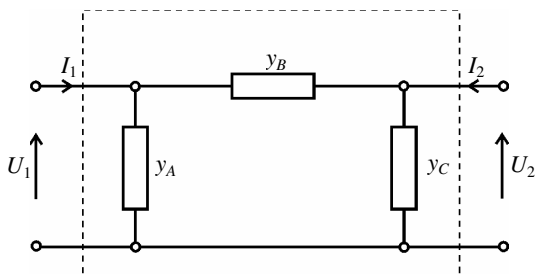
Sl. 31.3 Model dvoprilaza iskazan s pomoću admitancijskih parametara.

#### a) **Recipročni dvoprilazi**

Dvoprilaz je **recipročan** ako se sastoji od recipročnih elemenata mreže. No, tada je prema (29.8)

$$y_{12} = y_{21} \quad (4)$$

te za potpuni opis recipročnog dvoprilaza dostaje određivanje **triju** parametara. Bilo koji recipročni dvoprilaz može se prikazati **nadomjesnom  $\pi$ -shemom spoja**, prema slici 31.4.



Sl. 31.4 Prikaz općeg recipročnog dvoprilaza s pomoću admitancijskih parametara.

Na osnovi pokusa kratkog spoja proizlazi da je

$$y_{11} = y_A + y_B ; \quad y_{22} = y_B + y_C ; \quad y_{12} = y_{21} = -y_B$$

te dobivamo da su elementi nadomjesne  $\pi$ -sheme spoja dani izrazima

$$y_A = y_{11} + y_{12} ; \quad y_B = -y_{12} = -y_{21} ; \quad y_C = y_{22} + y_{21} \quad (5)$$

#### b) **Simetrični dvoprilazi**

Dvoprilaz je **simetričan** ako se izmjenom ulaznih priključaka s izlaznim priključcima ne promijene naponi i struje vanjskih krugova. U suprotnom dvoprilaz je **nesimetričan**. Iz modela dvoprilaza, slika 31.3, očigledno je da osim uvjeta recipročnosti (4), u svakom simetričnom dvoprilazu mora vrijediti da je

$$y_{11} = y_{22} \quad (6)$$

## 31.2 NAPONSKE JEDNADŽBE

Drugi mogući skup jednadžbi dvoprilaza

$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (7)$$

$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

nazivamo **naponske jednadžbe** dvoprilaza. Parametri  $z_{ij}$  imaju smisao impedancija i nazivaju se **impedancijskim parametrima**. Određuju se iz dva pokusa praznog hoda. Proizlazi da je

$$z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} ; \quad z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} ; \quad z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

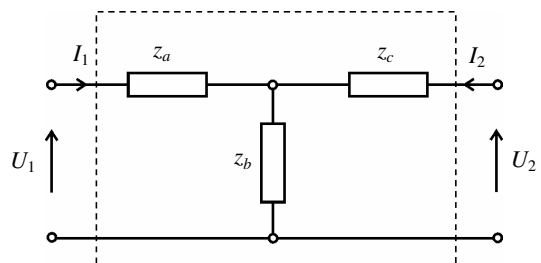
U skladu s izrazom (29.9) vrijedi da je u svakom **recipročnom** dvoprilazu

$$z_{12} = z_{21} \quad (8)$$

a za **simetrične** dvoprilaze još dodatno mora biti zadovoljeno da je

$$z_{11} = z_{22} \quad (9)$$

Bilo koji recipročni dvoprilaz može se prikazati **nadomjesnom T-shemom spoja**, prema slici 31.5.



Sl. 31.5 Prikaz općeg recipročnog dvoprilaza s pomoću impedancijskih parametara.

Na osnovi pokusa praznog hoda proizlazi da je

$$z_{11} = z_a + z_b ; \quad z_{22} = z_b + z_c ; \quad z_{12} = z_{21} = z_b$$

te dobivamo da su elementi nadomjesne  $T$  - sheme spoja dani izrazima

$$z_a = z_{11} - z_{12} \quad ; \quad z_b = z_{12} = z_{21} \quad ; \quad z_c = z_{22} - z_{21} \quad (10)$$

*Napomena:* Kao i pri  $\pi$  - shemi spoja radi se samo o matematičkoj ekvivalenciji. Iako su parametri  $R$ ,  $L$  i  $C$  koji tvore recipročnu mrežu pozitivni, impedancije  $z_a$ ,  $z_b$ , i  $z_c$  kao i prije dobivene vrijednosti admitancija  $y_A$ ,  $y_B$ ,  $y_C$  ne moraju biti pozitivne. Dakle, može se dogoditi da ne postoji fizička realizacija ovih parametara s pomoću pasivnih komponenata.

*Primjer:* Odredite parametre  $T$  - i  $\pi$  - sheme spoja linearnog dvonamotnog transformatora!

*Rješenje:*

Linearni dvonamotni transformator, shvaćen kao dvoprilaz definiran je naponskim jednadžbama

$$\begin{aligned} U_1 &= sL_1 I_1 + sM I_2 \\ U_2 &= sM I_1 + sL_2 I_2 \end{aligned} \quad (11)$$

odakle neposredno proizlazi da je

$$z_{11} = sL_1 \quad ; \quad z_{12} = z_{21} = sM \quad ; \quad z_{22} = sL_2$$

te su u skladu sa (10) parametri nadomjesne  $T$  - sheme spoja dani izrazima

$$z_a = s(L_1 - M) \quad ; \quad z_b = sM \quad ; \quad z_c = s(L_2 - M)$$

Riješivši sustav jednadžbi (11) po  $I_1$  i  $I_2$  dobivamo da je

$$I_1 = \frac{L_2 U_1 - M U_2}{s(L_1 L_2 - M^2)} \quad ; \quad I_2 = \frac{-M U_1 + L_1 U_2}{s(L_1 L_2 - M^2)}$$

odakle neposredno proizlaze vrijednosti parametara  $y_{11}$ ,  $y_{12} = y_{21}$  i  $y_{22}$  te koristeći izraze (5) i vrijednosti parametara nadomjesne  $\pi$  - sheme spoja

$$\begin{aligned} y_A &= \frac{L_2 - M}{s(L_1 L_2 - M^2)} \quad ; \quad y_B = \frac{M}{s(L_1 L_2 - M^2)} \quad ; \\ y_C &= \frac{L_1 - M}{s(L_1 L_2 - M^2)} \end{aligned}$$

Iako su oba prikaza linearnog dvonamotnog transformatora jednakovrijedna, očigledno je da je prikaz s pomoću  $T$  - sheme spoja bitno jednostavniji!

### 31.3 HIBRIDNE JEDNADŽBE

Ako se kao nezavisne varijable odaberu po jedna struja i jedan napon s različitih prilaza, dobivaju se dva skupa hibridnih jednadžbi, i to:

$$\begin{aligned} U_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} U_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} U_2 \end{aligned} \quad (12)$$

odnosno

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11} U_1 + g_{12} I_2 \\ U_2 &= g_{21} U_1 + g_{22} I_2 \end{aligned} \quad (13)$$

Da bi se odredili  $h$  - parametri potrebno je provesti pokus kratkog spoja na izlazu dvoprilaza i pokus praznog hoda na ulazu dvoprilaza. Na osnovi pokusa kratkog spoja proizlazi da je

$$h_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0} \quad ; \quad h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{U_2=0}$$

a iz pokusa kratkog spoja prema slici 31.2b parametri

$$h_{12} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_1=0} \quad ; \quad h_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{I_1=0}$$

Na posve analogan način određuju se  $g$  - parametri, i to

$$g_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{I_2=0} \quad ; \quad g_{21} = \frac{U_2}{U_1} \Big|_{I_2=0}$$

odnosno

$$g_{12} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{U_1=0} \quad ; \quad g_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{U_1=0}$$

#### a) Recipročni dvoprilazi

Odredimo koji uvjet moraju zadovoljavati hibridni parametri u recipročnom dvoprilazu. U poglavlju 29.3 pokazano je da u recipročnom dvoprilazu mora vrijediti jednakost prijenosnog omjera napona i struje, izraz (29.10). Opažamo da je u skladu sa zadanim referencijama struja na slici 29.7 i slici 31.1

$$\alpha_{21} = -h_{21}$$

odnosno da je u skladu sa zadanim referencijama napona na istim slikama

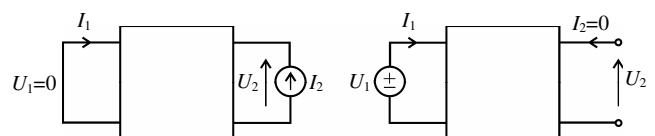
$$A_{12} = h_{12}$$

što znači da u recipročnom dvoprilazu vrijedi da je

$$h_{12} + h_{21} = 0 \quad (14)$$

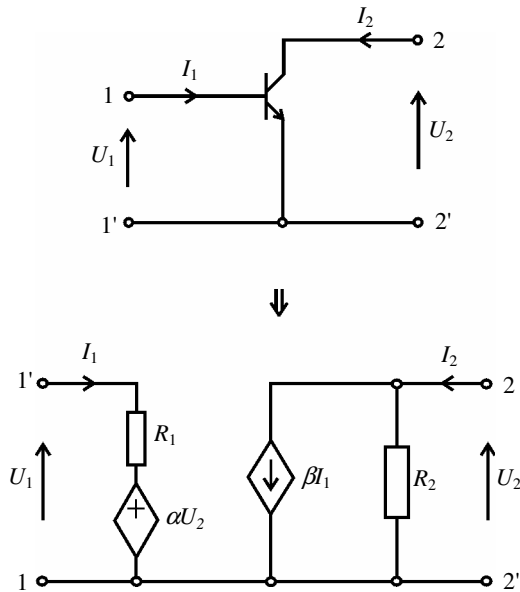
Analognim postupkom bi se na temelju pokusa prema slici 31.6 pokazalo da u recipročnoj mreži vrijedi da je

$$g_{12} + g_{21} = 0 \quad (15)$$



Sl. 31.6 Pokusi s pomoću kojih se određuju  $g$  - parametri.

*Primjer:* Slika 31.7 prikazuje pojednostavljenu nadomjesnu shemu bipolarnog tranzistora u spoju sa zajedničkim emiterom. Odredite  $h$ -parametre bipolarnog tranzistora.



Sl. 31.7 Pojednostavljena nadomjesna shema bipolarnog tranzistora.

*Rješenje:*

Na osnovi pokusa kratkog spoja ( $U_2 = 0$ ) dobivamo da je

$$h_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0} = R_1 \quad ; \quad h_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{U_2=0} = \beta$$

dok na osnovi pokusa praznog hoda ( $I_1 = 0$ ) proizlazi da je

$$h_{12} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_1=0} = \alpha \quad ; \quad h_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{R_2}$$

Iz načina rada bipolarnog tranzistora zna se da je  $\alpha \approx 0$ , dok je  $\beta > 0$ . Opažamo da je  $h_{12} + h_{21} \neq 0$ , što znači da bipolarni tranzistor *nije* recipročni element.

### b) Simetrični dvoprilazi

Odredimo koji dodatni uvjet uz (14) odnosno (15) mora biti zadovoljen u svakom simetričnom dvoprilazu izražen s pomoću hibridnih parametara. Napišimo sustav jednačbi (12) u matričnom obliku ali uz drukčiji raspored varijabli nego što je to dano u (12):

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{22} & h_{21} \\ h_{12} & h_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Iz ovog sustava jednačbi lako dobijemo da je

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta h} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

gdje je  $\Delta h = \det [h_{ij}] = h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12}$ . U simetričnom dvoprilazu zamjenom ulaza s izlazom ne smiju se promijeniti naponi i struje vanjskog kruga. To znači da

desne strane jednačbi zapisanih u matričnom obliku (16) i (17) moraju biti jednake. Opažamo da je uvjet recipročnosti zadovoljen tj. da je  $h_{21} = -h_{12}$  a dodatni uvjet da bi (16) i (17) bili jednaki jest da bude

$$\Delta_h = \det [h_{ij}] = 1 \quad (18)$$

Analognim postupkom dobili bismo da u svakom simetričnom dvoprilazu opisanom s pomoću  $g$ -parametara vrijedi da je

$$\Delta_g = \det [g_{ij}] = 1 \quad (19)$$

### 31.4 PRIJENOSNE JEDNAČBE

Ako se kao nezavisne varijable odaberu ili obje varijable izlaza ili obje varijable ulaza, dobiju se preostala dva skupa jednačbi koji se zovu *prijenosne jednačbe dvoprilaza*. U skalarnom obliku ove jednačbe glase

$$U_1 = a_{11}U_2 - a_{12}I_2 \quad (20)$$

$$I_1 = a_{21}U_2 - a_{22}I_2$$

odnosno

$$U_2 = b_{11}U_1 + b_{12}I_1 \quad (21)$$

$$-I_2 = b_{21}U_1 + b_{22}I_1$$

dok u matričnom obliku glase

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

Matrice  $[a_{ij}]$  i  $[b_{ij}]$  su tzv. *prijenosne matrice dvoprilaza* i međusobno su inverzne. Predznak (-) uz varijablu  $I_2$  je uzet zato jer se u tehnici prijenosa električne energije (signala), gdje se i najviše koriste ove matrice, uobičajilo da se izlazna struja  $I_2$  smatra pozitivnom ako izlazi iz prilaza za razliku od uobičajenog načina označavanja koji je u svim ostalim slučajevima suprotan.

Razmotrimo samo sustav jednačbi s  $a$ -parametrima. Ovi se parametri određuju na osnovi izraza

$$a_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} \quad ; \quad a_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0}$$

odnosno

$$a_{12} = -\frac{U_1}{I_2} \Big|_{U_2=0} \quad ; \quad a_{22} = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{U_2=0}$$

### a) Recipročni dvoprilazi

Odredimo koji uvjet moraju zadovoljavati  $a$ -parametri u recipročnom dvoprilazu. U tu svrhu poslužimo se

jednakošću prijenosnih impedancija, izraz (8), i izrazimo ga s pomoću  $a$  - parametara. Vrijedi

$$z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} ; \quad z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad (22)$$

Uvrstimo uvjet  $I_1 = 0$  u sustav jednadžbi (20). Proizlazi da je  $a_{21}U_2 = a_{22}I_2$ , što uvršteno u prvu od jednadžbi (20) daje

$$U_1 = \left( a_{11} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{22}} \right) U_2$$

odakle lako dobivamo da je

$$z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{\left( a_{11} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{22}} \right) U_2}{\frac{a_{21}}{a_{22}} U_2} = \frac{1}{a_{21}} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

S druge strane, ako se u drugu jednadžbu sustava (20) uvrsti da je  $I_2=0$ , proizlazi da je

$$z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{a_{21}}$$

što znači da se uvjet recipročnosti (22) izražen s pomoću  $a$  - parametara svodi na uvjet

$$\Delta_a = \det [a_{ij}] = 1 \quad (23)$$

Budući da su matrice  $[a_{ij}]$  i  $[b_{ij}]$  inverzne, što znači da je  $\Delta_a = 1/\Delta_b$ , to će za recipročne dvoprilaze opisane s pomoću  $b$  - parametara vrijediti uvjet

$$\Delta_b = \det [b_{ij}] = 1 \quad (24)$$

### b) Simetrični dvoprilazi

Analognim postupkom kao u prethodnom odsječku lako se iz uvjeta simetričnosti, izraz (9) tj.

$$z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

taj isti uvjet izrazi s pomoću  $a$  - parametara. Vrijedi da je

$$a_{11} = a_{22} \quad (25)$$

odnosno da je dodatni uvjet koji mora biti zadovoljen u svakom simetričnom dvoprilazu opisanom s pomoću  $b$  - parametara

$$b_{11} = b_{22} \quad (26)$$

*Primjer:* Odredite  $a$  - parametre idealnog transformatora!

*Rješenje:*

Konstitutivne relacije idealnog transformatora napišu se u obliku sustava jednadžbi (20), tj. kao

$$U_1 = nU_2 ; \quad I_1 = \frac{1}{n}(-I_2)$$

gdje je sa  $n$  označen prijenosni omjer. Odmah vidimo da je

$$a_{11} = n ; \quad a_{12} = a_{21} = 0 ; \quad a_{22} = \frac{1}{n}$$

a u skladu s uvjetima (23) i (25) zaključujemo da je idealni transformator *recipročni* ali *ne* i *simetrični* dvoprilaz.