XXX. PREDAVANJE

Potpuna ekvivalencija. Ekvivalencija s obzirom na prilaze. Primjer linearnog dvonamotnog transformatora. Jednakost parametara dvaju dvoprilaza. Transformacija temeljnih shema spoja recipročnih dvoprilaza: spoj "trokut" u spoj "zvijezda" i obratno. Rosenov teorem: pretvorba zvjezdaste mreže u petljastu mrežu. Ekvivalencija mreža s obzirom na mali izmjenični signal: primjer jednostepenog tranzistorskog pojačala. Lančani (kaskadni) spoj. Serijski spoj. Testovi valjanosti za serijski spoj. Paralelni spoj. Testovi valjanosti za paralelni spoj. Mješoviti spojevi: serijsko-paralelni i paralelno-serijski spoj. Spojevi mreža sa tri priključka.

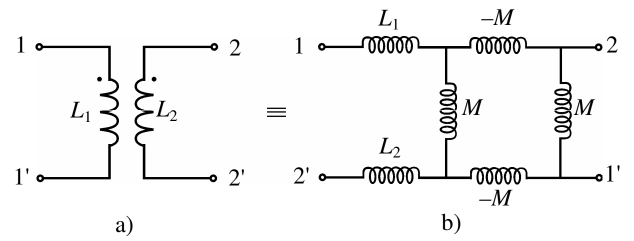
32. SVOJSTVA DVOPRILAZA

32.1 EKVIVALENCIJA MREŽA

Ako neku mrežu može zamijeniti neka druga mreža, a da se pri tome ne promijene niti naponi niti struje na njenim priključcima, tada se te dvije mreže *promatrane izvana* ne razlikuju i kažemo da su te dvije mreže *ekvivalentne.* Razlikujemo:

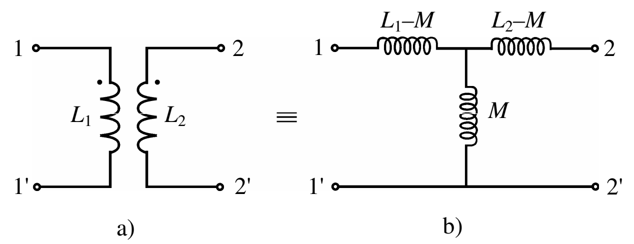
a) ***potpunu ekvivalenciju***, kada su jednaki naponi i struje obiju mreža na *svim priključcima*, i
b) ***ekvivalenciju s obzirom na prilaze***, kada su jednaki naponi i struje obiju mreža na *svim prilazima.*

Karakterističan primjer na kojem možemo jasno uočiti razliku između ove dvije vrste ekvivalencija jest primjer linearnog dvonamotnog transformatora. Sve moguće kombinacije pokusa koje bi proveli na oba dvoprilaza prikazana na slici 32.1 dovele bi do istih vrijednosti napona i struje na svim priključcima dvoprilaza, što se može lako provjeriti računom. Nasuprot tome,



Sl. 32.1 Prikaz linearnog dvonamotnog transformatora s pomoću dvije *potpuno ekvivalentne* mreže (dvoprilaza).

dvoprilazi prikazani na slici 32.2 su ekvivalentni s obzirom na prilaze. Da te dvije mreže nisu potpuno ekvivalentne postaje očigledno ako se primjerice, narine napon između priključaka 1' i 2'. Očigledno, struja kroz priključke 1' i 2'



Sl. 32.2 Prikaz linearnog dvonamotnog transformatora s pomoću dviju mreža *ekvivalentnih s obzirom na prilaze.*

mora biti jednaka nuli, što i dobivamo na osnovi mreže prikazane na slici 32.1b, dok se u mreži prikazanoj na slici 32.2b dobiva kratki spoj!

Napomena: Često se u praksi pogrešno upotrebljava termin ekvivalentna mreža umjesto termina model naprave ili stvarne mreže. Uistinu ima smisla reći da su *dva različita* modela naprave ili stvarne mreže ekvivalentni ako se njihovi odzivi ne razlikuju za iste zadane poticaje. Besmisleno je reći da je neka naprava ili stvarna mreža modelirana ekvivalentnom mrežom.

U nastavku analizirat ćemo samo mreže *ekvivalentne s obzirom na prilaze*. Unutarnja struktura (shema spoja) svake pojedine mreže tada više nije bitna, dakle ne mora biti niti poznata.

Proizlazi da su dvije mreže ekvivalentne (s obzirom na prilaze) ako se mogu prikazati *istim višeprilazom.* Za mreže prikazane dvoprilazima ovo znači da su ekvivalentne ako im je jedan od *skupova parametara* (recimo z-parametri) *jednak*. Za linearne vremenski nepromjenljive dvoprilaze jednakost jednog skupa parametara ujedno znači i jednakost svih ostalih skupova parametara.

Ako je poznata shema spoja linearne vremenski nepromjenljive mreže A, shvaćene kao dvoprilaz, može se izgraditi njoj ekvivalentna mreža B, uzimajući u obzir uvjete ekvivalencije, izraženo recimo s pomoću z-parametara:

$$z_{11}^A = z_{11}^B \;\; ; \;\; z_{12}^A = z_{12}^B \;\; ; \;\; z_{21}^A = z_{21}^B \;\; ; \;\; z_{22}^A = z_{22}^B \qquad (1)$$

gdje su sa z_{ij}^A označeni z-parametri mreže A, a sa z_{ij}^B z-parametri mreže B. Ako broj elemenata mreže A premašuje *četiri,* prijelaz iz jedne mreže u drugu, nije jednoznačan.

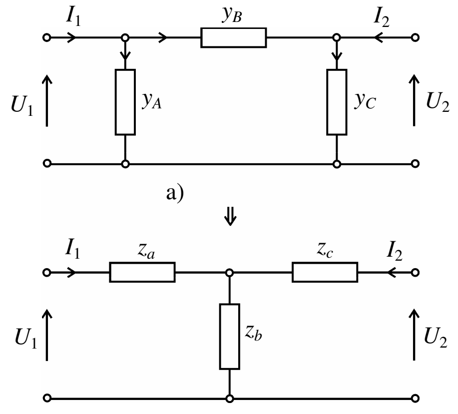
Za recipročne mreže vrijedi da je $z_{12}=z_{21}$, te se broj uvjetnih jednadžbi (1) smanjuje na *tri*.

Svaki problem koji se može riješiti s pomoću ekvivalentne mreže može se riješiti i bez nje. S toga rješavanje ekvivalentnih mreža ima smisla ako se time pojednostavljuje početno zadani problem. Karakterističan primjer jest transformacija temeljnih shema spoja recipročnih mreža kada je poznata ili π-shema spoja ili T-shema spoja i zgodno je zbog kasnije jednostavnije analize prijeći iz jedne sheme spoja u njoj ekvivalentnu drugu shemu spoja.

32.1.1 *Transformacija temeljnih shema spoja recipročnih dvoprilaza*

Pretpostavimo da su poznati elementi π-sheme spoja nekog recipročnog dvoprilaza y_A, y_B *i* y_C. Potrebno je odrediti vrijednosti elemenata z_a, z_b *i* z_c ekvivalentne

T-sheme spoja, slika 32.3. Često se ovaj postupak zove i ***transformacija spoja "trokut" u spoj "zvijezda".***



Sl. 32.3 Transformacija π-sheme spoja u ekvivalentnu *T*-shemu spoja.

Pronađimo z-parametre koji opisuju π-shemu spoja. U skladu sa slikom 32.3a i pridijeljenim referentnim smjerovima vrijedi da je

$$I_1 = (y_A + y_B)U_1 - y_B U_2$$
$$I_2 = -y_B U_1 + (y_B + y_C)U_2$$

Riješivši ovaj sustav jednadžbi po U_1 i U_2 dobivamo da je

$$U_1 = \frac{1}{\Delta y}\left[(y_B + y_C)I_1 + y_B I_2\right]$$
$$U_2 = \frac{1}{\Delta y}\left[y_B I_1 + (y_A + y_B)I_2\right] \qquad (2)$$

gdje je sa Δy označena determinanta sustava

$$\Delta y = y_A y_B + y_A y_C + y_B y_C$$

Sustavom jednadžbi (2) opisana je π-shema spoja s pomoću impedancijskih parametara. Usporedbom sustava jednadžbi (2) i (31.7) proizlazi odmah da je

$$z_{11} = \frac{1}{\Delta y}(y_B + y_C) \; ; \; z_{12} = z_{21} = \frac{1}{\Delta y} y_B \; ; \; z_{22} = \frac{1}{\Delta y}(y_A + y_B)$$

S druge strane, za mrežu sheme spoja prema slici 32.3b vrijedi da je

$$z_{11} = z_a + z_b \quad ; \quad z_{12} = z_{21} = z_b \quad ; \quad z_{22} = z_b + z_c$$

te iz jednakosti z-parametara, u skladu s uvjetima (1), proizlazi da je

$$z_a = \frac{1}{\Delta y} y_C \quad ; \quad z_b = \frac{1}{\Delta y} y_B \quad ; \quad z_c = \frac{1}{\Delta y} y_A \qquad (3)$$

čime je omogućeno da se na temelju poznatih admitancija π-sheme spoja neke recipročne mreže odrede impedancije ekvivalentne *T*-sheme spoja te iste recipročne mreže. Vrijedi i obrat, tj. transformacija spoja "zvijezda" u spoj "trokut". Analognim postupkom dobili bismo da je

$$y_A = \frac{1}{\Delta z} z_c \quad ; \quad y_B = \frac{1}{\Delta z} z_b \quad ; \quad y_C = \frac{1}{\Delta z} z_a \qquad (4)$$

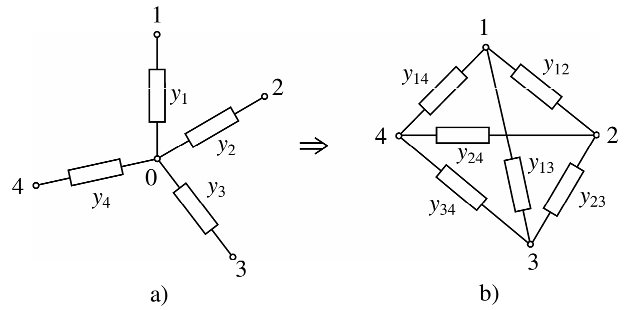
gdje je

$$\Delta z = z_a z_b + z_a z_c + z_b z_c$$

POOPĆENJE:
Transformacija spoja "zvijezda" u spoj "trokut" poseban je slučaj ***Rosenovog teorema*** (A. Rosen, 1924.) koji glasi:

U nekoj mreži zvijezda od n elemenata admitancija y_1, y_2, …,y_n, slika 32.4a može biti zamijenjena petljastom mrežom od $n(n\text{-}1)/2$ elemenata, slika 32.4b, u kojoj između svaka dva priključka zvijezde j i k postoji jedan element mreže admitancije

$$y_{jk} = \frac{y_j y_k}{\sum_{i=1}^{n} y_i} \qquad (5)$$



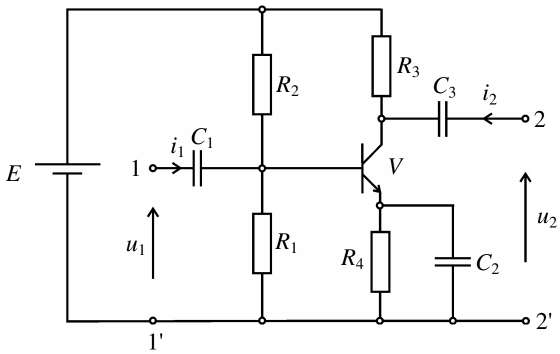
Sl. 32.4 Zvijezda od 4 elementa transformira se u petljastu mrežu od 6 elemenata.

Obrat teorema ne važi, tj. petljasta mreža ne može se transformirati u ekvivalentnu zvijezdu. To je moguće samo ako je $n = 3$. Tada je broj elemenata zvijezde i odgovarajuće petljaste mreže jednak i to je prethodno objašnjena transformacija spoja "zvijezda" u spoj "trokut" i obratno.

32.1.2 *Ekvivalencija mreže s obzirom na mali ulazni izmjenični signal*

Transformacija π-sheme spoja u *T*-shemu spoja i obratno vrijedi za svaku recipročnu mrežu i ne ovisi o vrsti poticaja.

U *nerecipročnim mrežama,* kao i u *nelinearnim mrežama,* pronalaženje mreža ekvivalentnih zadanim mrežama a jednostavnijim za analizu općenito je *nerješiva zadaća.* Za u praksi elektroničkih sklopova važan slučaj istodobnog djelovanja istosmjernog i "malog" izmjeničnog signala na neke nelinearne sklopove može se analiza bitno pojednostaviti ako se nelinearni elementi mreže lineariziraju u okolišu radne točke te shvate kao linearni dvoprilazi. U tome slučaju pridjev "mali izmjenični" znači toliki ulazni signal narinut na dvoprilaz da se sa zadovoljavajućom tehničkom točnošću dvoprilaz još uvijek može smatrati linearnim.



Sl. 32.5 Shema spoja jednostepenog tranzistorskog pojačala.

Razmotrimo najjednostavniji primjer jednostepenog tranzistorskog pojačala, slika 32.5. Na ulazu 1 djeluje ulazni izmjenični signal $u_1(t)$ a na izlazu 2 dobiva se korisni signal $u_2(t)$. Bipolarni tranzistor V zadan je nelinearnim karakteristikama

$$u_{BE} = f_1(i_B, u_{CE}) \quad ; \quad i_C = f_2(i_B, u_{CE})$$

gdje je sa u_{BE} označen napon baza-emiter, sa i_B -struja baze, sa u_{CE} - napon kolektor-emiter, a sa i_C - struja kolektora.

Radnu točku Q tranzistora određuje napon napajanja E te otpori R_1 do R_4. Pretpostavimo toliko mali ulazni izmjenični signal u_1 da se karakteristike tranzistora u okolišu radne točke mogu linearizirati. Razvojem u Taylorov red i uzimanjem u obzir samo linearnog člana dobivamo da u okolišu radne točke Q vrijede ovi izrazi

$$\delta u_{BE} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial i_B}\right|_Q \cdot \delta i_B + \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_{CE}}\right|_Q \cdot \delta u_{CE}$$

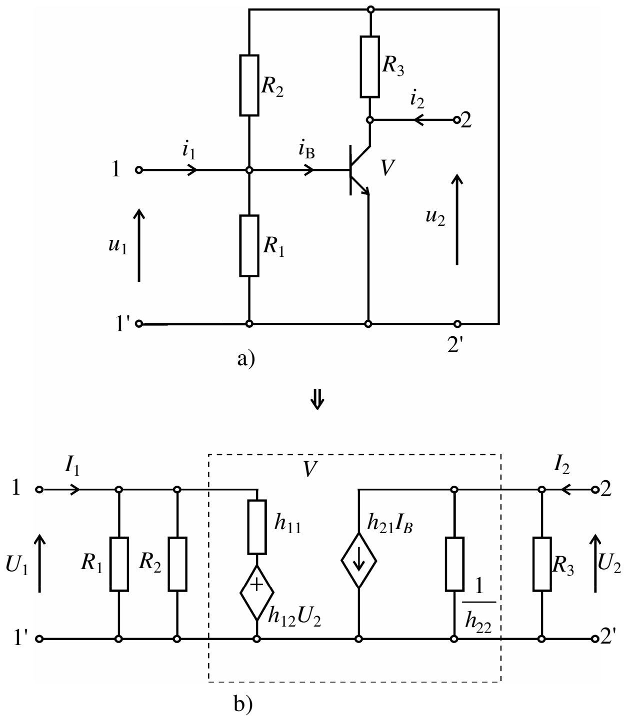
$$\delta i_C = \left.\frac{\partial f_2}{\partial i_B}\right|_Q \cdot \delta i_B + \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_{CE}}\right|_Q \cdot \delta u_{CE}$$

Pretpostavimo li da su vrijednosti parcijalnih derivacija za zadani "hod" ulaznog izmjeničnog signala konstantne, opažamo da se tranzistor može shvatiti kao linearni dvoprilaz opisan h-parametrima, tj. da je

$$U_{BE} = h_{11} I_B + h_{12} U_{CE}$$
$$I_C = h_{21} I_B + h_{22} U_{CE}$$

gdje su sa U_{BE} i I_B označeni Laplaceovi transformati ulaznih varijabli dvoprilaza a sa U_{CE} i I_C Laplaceovi transformati izlaznih varijabli dvoprilaza.

U pojednostavljenoj analizi ovog pojačala obično se pretpostavlja da su u interesantnom području frekvencija ulaznog signala $u_1(t)$ impedancije svih kapaciteta zanemarive te shema spoja pojačala za mali izmjenični signal izgleda kao na slici 32.6a. Izvor napajanja predstavlja za izmjenični signal kratki spoj, te nakon svih pojednostavljenja, uzevši u obzir nadomjesnu shemu spoja tranzistora prema slici 31.7, dobivamo konačno mrežu ekvivalentnu polaznoj, slika 32.6b.



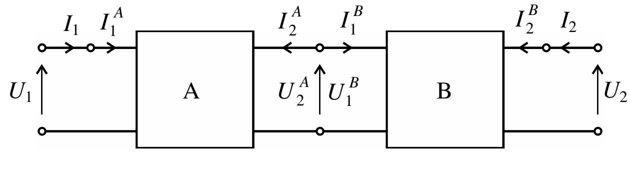
Sl.32.6 a) Shema spoja za mali izmjenični signal.
b) Ekvivalentna mreža polaznoj za mali izmjenični signal (svi reaktivni utjecaji zanemareni !).

32.2 SPAJANJE DVOPRILAZA

Često se složeniji dvoprilaz može shvatiti kao da je stvoren spajanjem jednostavnijih dvoprilaza. To je važno i sa stajališta projektiranja dvoprilaza. Naime, obično je bitno jednostavnije projektirati jednostavne cjeline (dvoprilaze) i zatim ih spojiti u složeniju cjelinu (dvoprilaz) nego odmah pristupiti projektiranju složenije cjeline.

32.2.1 *Lančani (kaskadni) spoj*

Lančani spoj jest najjednostavniji način spajanja dvaju ili više dvoprilaza budući da je kod tog načina spajanja uključen samo jedan od prilaza svakog od spojnih dvoprilaza, slika 32.7.



Sl.32.7 Lančani spoj dvaju dvoprilaza.

Opišimo dvoprilaze A i B s pomoću a-parametara. U skladu s izrazima (31.20) prijenosne jednadžbe dvoprilaza u matričnoj formi glase:

$$\begin{bmatrix} U_1^A \\ I_1^A \end{bmatrix} = \left[a_{ij}^A\right] \begin{bmatrix} U_2^A \\ -I_2^A \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} U_1^B \\ I_1^B \end{bmatrix} = \left[a_{ij}^B\right] \begin{bmatrix} U_2^B \\ -I_2^B \end{bmatrix}$$

No, u skladu s oznakama na slici 32.7 vrijedi da je

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^A \\ I_1^A \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} U_2^A \\ -I_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^B \\ I_1^B \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} U_2^B \\ -I_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

te dobivamo da je

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \left[a_{ij}^A\right]\left[a_{ij}^B\right] \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

U lančanom spoju dvaju dvoprilaza parametri tako dobivenog složenog dvoprilaza određuju se *množenjem matrica s a-parametrima* pojedinih dvoprilaza. Proširenje na lančani spoj od n dvoprilaza je trivijalno kao i to da se cijeli postupak s istim rezultatom mogao provesti koristeći i b-parametre.
VAŽNO: Lančani spoj je uvijek moguć!

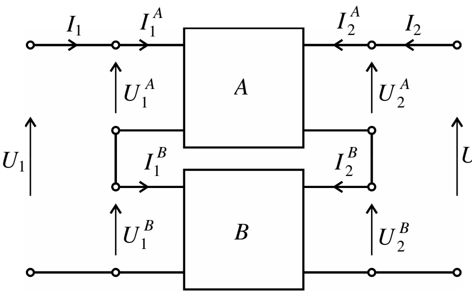
32.2.2 *Serijski spoj*

Slika 32.8 prikazuje serijski spoj dvaju dvoprilaza. Očigledno u serijskom spoju vrijede ovi odnosi :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^A + U_1^B \\ U_2^A + U_2^B \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^A \\ I_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^B \\ I_2^B \end{bmatrix} \tag{7}$$

Opišemo li dvoprilaze A i B s pomoću z-parametara, to će vrijediti da je

$$\begin{bmatrix} U_1^A \\ U_2^A \end{bmatrix} = \left[z_{ij}^A\right] \begin{bmatrix} I_1^A \\ I_2^A \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} U_1^B \\ U_2^B \end{bmatrix} = \left[z_{ij}^B\right] \begin{bmatrix} I_1^B \\ I_2^B \end{bmatrix}$$



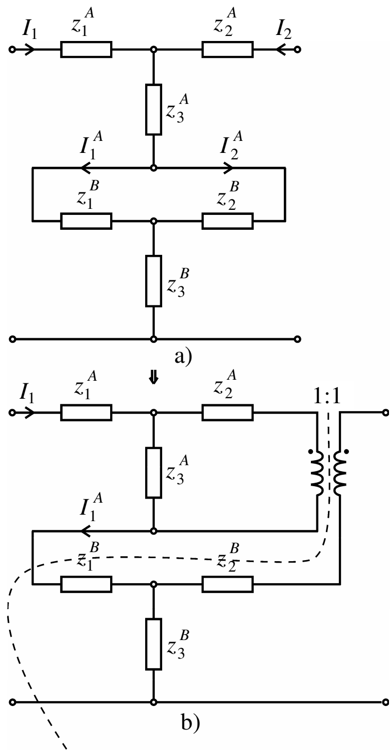
Sl.32.8 Serijski spoj dvaju dvoprilaza.

te koristeći uvjete (7) dobivamo da je

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \left[z_{ij}^A + z_{ij}^B\right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

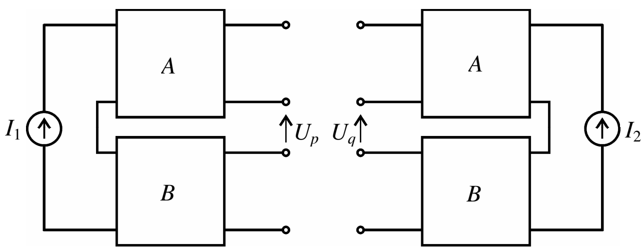
Dakle, u serijskom spoju dvaju dvoprilaza njihovi se *z-parametri zbrajaju.*

Serijski spoj *nije uvijek moguć.* Pokažimo to na primjeru, slika 32.9a. Vidimo da je nakon serijskog spoja došlo do promjene sheme spoja dvoprilaza B (z_1^B i z_2^B kratko su spojeni!). Uvjet (7) ipak se može uvijek zadovoljiti dodavanjem idealnog transformatora prijenosnog omjera n = 1 na način kako je pokazano na slici 32.9b.



Sl. 32.9 a) Serijski spoj dvoprilaza kod kojeg je $I_1 \neq I_1^A$, $I_2 \neq I_2^A$.
b) Serijski spoj dvoprilaza pri čemu se koristeći idealni transformator jamči da je $I_1 = I_1^A$, $I_2 = I_2^A$.

S obzirom na to da se sheme spoja dvoprilaza u načelu *ne znaju*, to je nužno *prije* serijskog spoja provjeriti je li on dopušten, provedbom tzv. ***testa valjanosti*** (O. Brune, 1931.), slika 32.10.



Sl.32.10 Testovi valjanosti serijskog spoja. Ako je $U_p = 0$ i $U_q = 0$ dvoprilazi A i B mogu se serijski spojiti, inače ne!

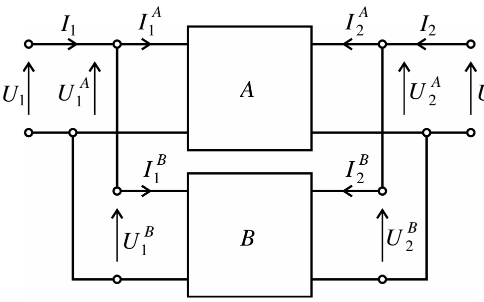
32.2.3 *Paralelni spoj*

Slika 32.11 prikazuje paralelni spoj dvaju dvoprilaza. Očigledno u paralelnom spoju vrijede ovi odnosi:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^A \\ U_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^B \\ U_2^B \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^A + I_1^B \\ I_2^A + I_2^B \end{bmatrix} \tag{9}$$

Opišemo li dvoprilaze s pomoću y-parametara, to će vrijediti da je

$$\begin{bmatrix} I_1^A \\ I_2^A \end{bmatrix} = \left[y_{ij}^A\right] \begin{bmatrix} U_1^A \\ U_2^A \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} I_1^B \\ I_2^B \end{bmatrix} = \left[y_{ij}^B\right] \begin{bmatrix} U_1^B \\ U_2^B \end{bmatrix}$$



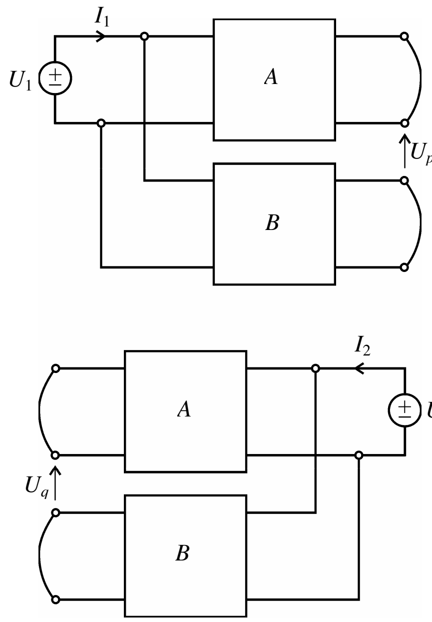
Sl.32.11 Paralelni spoj dvaju dvoprilaza.

te koristeći uvjete (9) dobivamo da je

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left[y_{ij}^A + y_{ij}^B \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

tj. u paralelnom spoju dvaju dvoprilaza njihovi se *y-parametri zbrajaju*.

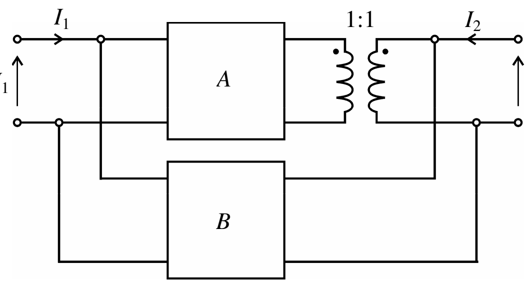
Analogno serijskom spoju, niti paralelno spajanje nije uvijek moguće. Zbog toga treba prethodno provesti testove valjanosti kako je to prikazano na slici 32.12.



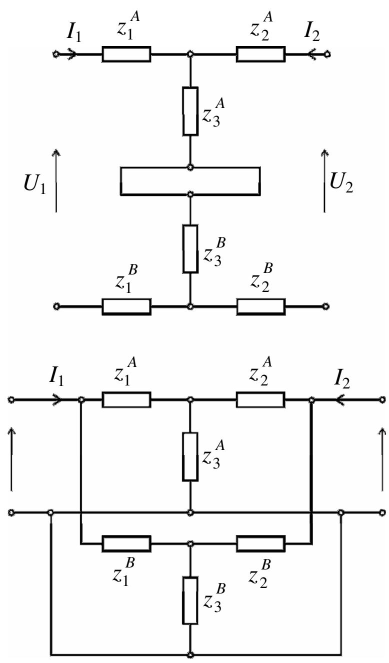
Sl.32.12 Testovi valjanosti paralelnog spoja. Ako je U_p= 0 i U_q= 0 dvoprilazi *A* i *B* mogu se paralelno spojiti a da se ne promijene parametri pojedinih dvoprilaza, inače ne!

Ako je $U_p \neq 0$ i $U_q \neq 0$ paralelni spoj je moguć tek nakon ugradnje idealnog transformatora prijenosnog omjera 1:1, kao što je to prikazano na slici 32.13.

VAŽNO: Ako su sheme spojeva dvoprilaza *poznate* spojevi s idealnim transformatorom mogu se izbjeći ako se dvoprilazi spoje na način prikazan na slici 32.14. To su tzv. ***regularni spojevi.***



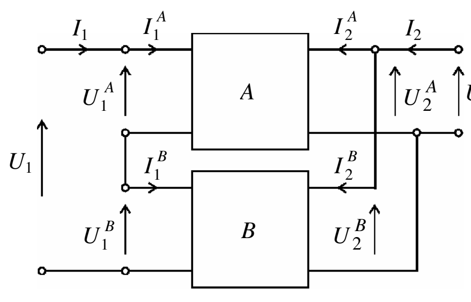
Sl.32.13 Uvođenjem idealnog transformatora na jednom od prilaza dvoprilazi *A* i *B* neovisno o unutrašnjim strukturama (shemama spoja) mogu se uvijek spojiti paralelno.



Sl.32.14 Regularni serijski i paralelni spoj dvaju dvoprilaza *T*-sheme spoja.

32.2.4 *Mješoviti spojevi*

Slika 32.15 prikazuje serijsko-paralelni spoj dvaju dvoprilaza. Ova je shema spoja jedna od temeljnih shema spoja u analizi ***mreža s povratnom vezom.***



Sl.32.15 Serijsko-paralelni spoj dvaju dvoprilaza.

U ovom spoju mora vrijediti da je

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^A + U_1^B \\ I_2^A + I_2^B \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} I_1^A \\ U_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^B \\ U_2^B \end{bmatrix}$$

te se koristeći *h*-parametre lako dobiva da je

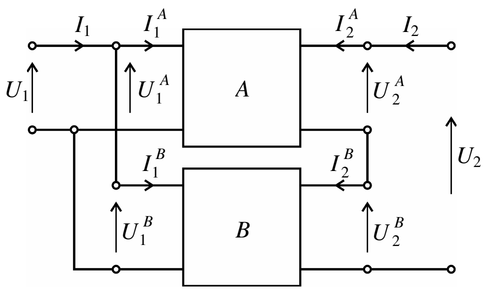
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left[h_{ij}^A + h_{ij}^B \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

tj. da se u serijsko-paralelnom spoju dvaju dvoprilaza njihovi *h-parametri zbrajaju.*

Kao i u prethodnim slučajevima izravno spajanje dvoprilaza nije uvijek moguće nego ga tek treba dokazati ili opovrći testovima valjanosti.

Druga varijanta mješovitog spoja jest paralelno-serijski spoj prikazan na slici 32.16. U ovom spoju mora vrijediti da je

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^A + I_1^B \\ U_2^A + U_2^B \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^A \\ I_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^B \\ I_2^B \end{bmatrix}$$



Sl.32.16 Paralelno-serijski spoj dvaju dvoprilaza.

te se koristeći *g*-parametre lako dobiva da je

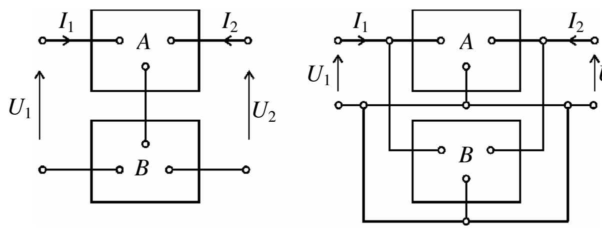
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \left[g_{ij}^A + g_{ij}^B \right] \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

tj. da se u paralelno-serijskom spoju dvaju dvoprilaza njihovi *g-parametri zbrajaju.*

Kao i u svim prethodnim slučajevima, izuzevši lančani spoj, izravno spajanje nije uvijek moguće nego ga tek treba dokazati ili opovrći testovima valjanosti.

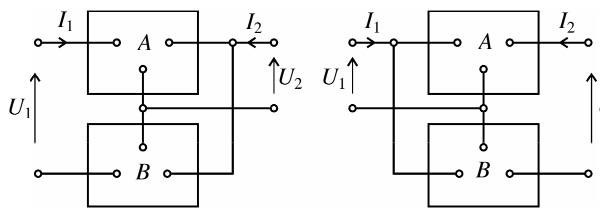
32.2.5 *Spojevi mreža sa tri priključka*

U najvećem broju za praksu važnih dvoprilaza jedan od priključaka je zajednički i za ulaz kao i za izlaz. Takav dvoprilaz je u stvari mreža sa tri priključka. Ako se takve dvije mreže spoje na načine prikazane na slikama 32.17 i 32.18, neće trebati provesti testove valjanosti budući da se takvim spajanjem ne mijenjaju parametri pojedinih mreža.



a) b)

Sl.32.17 Serijski i paralelni spoj mreža sa tri priključka.



a) b)

Sl.32.18 Mješoviti spojevi mreža sa tri priključka.

a) Serijsko-paralelni spoj.
b) Paralelno-serijski spoj.